

Luigi Enrico Casano

LA RADIOATTIVITA'

Dispense di **Fisica Applicata** per il IV^o anno del corso sperimentale in
FISICA AMBIENTALE E SANITARIA PER L'EUROPA (F.A.S.E.)
edite a cura del docente e dell'ITIS "H. Hertz" di Roma

V^a Edizione - A.S. 2005- 06

A quelli arrivati e a quelli
che stanno per arrivare

R. Kipling

LA RADIOATTIVITA'

	Indice	pag. 3
Cap. 1	Il nucleo	pag. 5
	- Indice	pag.
	- Introduzione, cenni storici, convenzioni	pag.
1.1	- Unità di massa-energia	pag.
1.2	- Isotopi	pag.
1.3	- Proprietà dei nuclei	pag.
1.4	- Reazioni nucleari	pag.
Appendice 1	- Elenco alfabetico degli elementi	pag.
Cap. 2	I decadimenti radioattivi	pag. 29
	- Indice	pag.
	- Introduzione	pag.
2.1	- Natura delle radiazioni α , β e γ	pag.
2.2	- Legge di decadimento	pag.
2.3	- Catene radioattive, legge dello spostamento	pag.
2.4	- Equilibrio ideale	pag.
2.5	- Equilibrio secolare	pag.
2.6	- Equilibrio transiente	pag.
2.7	- Decadimento α	pag.
2.8	- Decadimenti β	pag.
2.9	- Emissione γ	pag.
Cap. 3	La radioattività artificiale	pag. 47
	- Indice	pag.
3.1	- Produzione di elementi radioattivi	pag.
3.2	- Legge di accumulo di un prodotto radioattivo al variare del tempo di bombardamento	pag.
3.3	- Radionuclidi artificiali	pag.
3.4	- Elementi transuranici ($Z > 92$)	pag.
Cap. 4	Gli acceleratori di particelle	pag. 57
	- Indice	pag.
	- Introduzione	pag.
4.1	- Van de Graaff	pag.
4.2	- Acceleratori lineari o Linac	pag.
4.3	- Ciclotrone	pag.
4.4	- Betatrone	pag.
4.5	- Sincrotrone	pag.
4.6	- Anelli di accumulazione	pag.

Cap. 5	Interazioni della radiazione con la materia	pag. 67
	- Indice	pag.
5.1	- Definizioni e unità di misura	pag.
5.2	- Le sorgenti di radiazione	pag.
5.3	- Le particelle cariche pesanti	pag.
5.4	- Le particelle cariche leggere	pag.
5.5	- La radiazione elettromagnetica	pag.
Appendice	- L'effetto Compton	pag.

Cap. 1 - IL NUCLEO

Indice

Introduzione	7
Cenni storici	7
Convenzioni	7
1.1 - Unità di massa-energia	8
1.2 - Isotopi	8
1.3 - Proprietà dei nuclei	9
Dimensioni nucleari	9
Esercizio: misura sperimentale del raggio nucleare del ^{12}C .	10
Densità nucleare	11
Stati energetici nucleari	11
Transizioni nucleari	12
Masse nucleari	13
1.4 - Reazioni Nucleari	16
Leggi di conservazione	17
Cenno sui meccanismi di produzione delle reazioni nucleari	19
Fissione	20
Fusione	21
Appendice 1 – ELENCO ALFABETICO DEGLI ELEMENTI	24

Introduzione

Cenni storici

- 1908 - esperienza di E. Rutherford (1871-1937) sui raggi α : sono **atomi** di elio con una carica $+2e$ (2 cariche elettroniche); introduce il modello a “sistema solare” dell’atomo
- 1911 - N. Bohr (1885-1862) fornisce l’interpretazione del modello a “sistema solare” di Rutherford
- 1925 - W. Heisenberg (1901-1976) ed E. Schrodinger (1887-1961) introducono la meccanica ondulatoria
- 1925 - W. Pauli (1900-1958) formula il principio di esclusione, che spiega la struttura atomica a strati
- 1927 - W. Heisenberg formula il principio di indeterminazione
- 1928 - P.A.M. Dirac (1902-1984) introduce la relatività nella teoria quantistica
- 1932 - J. Chadwick (1891-1974) scopre il neutrone (n), la cui massa risulta essere $m_n \cong m_p \cong 1836 m_e \cong 938 \text{ MeV}$. Ne consegue che la particella α (nucleo di elio) è formata da $2p + 2n$ (complessivamente 4 nucleoni)

Convenzioni

Z = numero di protoni; numero atomico

A = numero di protoni + numero di neutroni; numero di massa

$N = A - Z$ = numero di neutroni

Per un nucleo, il cui simbolo chimico sia X e che sia formato da Z protoni ed N neutroni, la convenzione è: ${}_Z^A X$

Esempi:

idrogeno: H	$Z = 1; A = 1$	${}_1^1 H$
elio: He	$Z = 2; A = 4$	${}_2^4 He$
ossigeno: O	$Z = 8; A = 16$	${}_8^{16} O$

1.1 - Unità di massa-energia

$$1 \text{ UMA (unità di massa atomica)} = 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}_m = 9.314 \cdot 10^{-11} \text{ eV}$$

avendo posto la massa del ${}^{12}_6\text{C} = 12$

L'elettronvolt (eV)

E' il lavoro necessario per spostare una carica elettronica e tra due punti, fra i quali esiste una differenza di potenziale di 1 Volt:

$$L = q \cdot V = e \cdot V = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Joule} = 1 \text{ eV}$$

Multipli:

$$1 \text{ chiloelettronvolt} = 1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-16} \text{ Joule}$$

$$1 \text{ megaelettronvolt} = 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ Joule}$$

$$1 \text{ gigaelettronvolt} = 1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-10} \text{ Joule}$$

1.2 - Isotopi

Nuclei dello stesso elemento chimico con massa diversa. Per esempio:

deuterio $p + n$ 2 nucleoni

trizio $p + 2n$ 3 nucleoni

sono isotopi dell'idrogeno $H = p$.

Hanno, quindi, stesso Z , diversa A .

1.3 - Proprietà dei nuclei

Dimensioni nucleari

La **misura sperimentale** ha determinato che il raggio nucleare R è proporzionale alla radice cubica del numero di massa A del nucleo stesso

$$R \approx 1.2 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ m}$$

Perciò, mediante un calcolo semplificato, che considera il nucleo sferico, il volume è direttamente proporzionale ad A

$$V = 4/3 \pi R^3 \propto (A^{1/3})^3 = A$$

Conseguenza: al crescere del numero di nucleoni non aumenta la densità del nucleo ma la sua dimensione

Misura sperimentale

Su una lastrina cubica di carbonio C di 1 cm di lato viene inviato un fascio di neutroni n (Fig. 1.1). Dalla misura del rapporto tra i neutroni diffusi N ed i neutroni totali incidenti N_0 si risale alla sezione efficace o sezione d'urto σ del nucleo di carbonio.

$$\frac{N}{N_0} = \frac{10^{24} \sigma}{1 \text{ cm}^3} = 0.3$$

$$\sigma = \pi R^2$$

da cui risulta: $R_C \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ (per un approfondimento, si rimanda all'[esercizio](#)).

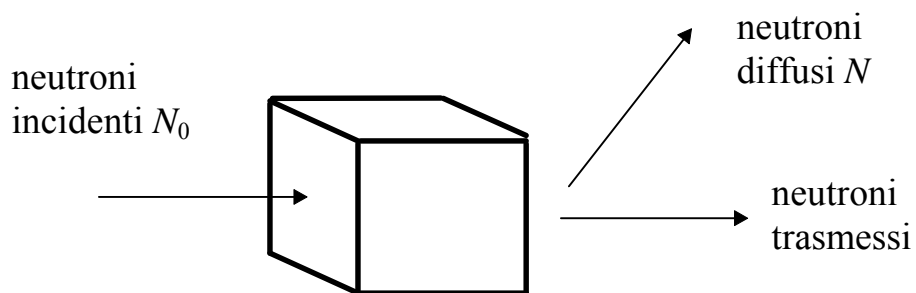


Fig. 1.1 – Schema dell'interazione neutroni-bersaglio nella misura del raggio nucleare

Esercizio: misura sperimentale del raggio nucleare del ^{12}C .

Poiché un atomo di C ha un diametro di 10^{-10} m = 10^{-8} cm, la lastrina contiene un numero di strati atomici pari a:

$$\mathbf{n. \text{ di strati atomici} \approx 1/10^{-8} = 10^8}$$

e contiene circa

$$\mathbf{(10^8)^3 = 10^{24} \text{ atomi}}$$

L'area della sezione trasversa di un nucleo di C è

$$\mathbf{\sigma = \pi R_C^2 \quad \text{con } R_C \text{ raggio nucleare del C}}$$

La frazione di neutroni rimossi dal fascio per diffusione è

$$\mathbf{N/N_0 = 10^{24} \sigma / A \quad \text{con } A = \text{area della lastrina}}$$

$$\mathbf{\sigma = (N/N_0) A \cdot 10^{-24} = 0.3 \cdot 1 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2}$$

Ma poiché

$$\mathbf{\sigma = \pi R_C^2 = 0.3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2}$$

da cui

$$\mathbf{R_C = (0.3 \cdot 10^{-24} / \pi)^{1/2} \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}}$$

$$\mathbf{(N.B.: R \approx R_0 A^{1/2} \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1.2 A^{1/2} \cdot 10^{-15} \text{ m})}$$

Densità nucleare

La distribuzione della materia del nucleo non è costante, ma varia dal centro alla periferia. I nuclei non sono semplici sfere (Fig. 1.2a), ma ellissoidi allungati o schiacciati (Fig. 1.2b).

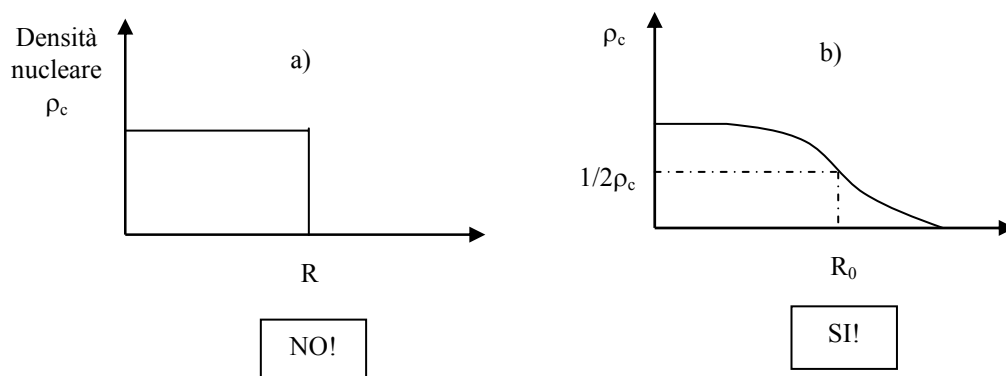


Fig. 1.2 - Distribuzione della materia nel nucleo in funzione del raggio R

Stati energetici nucleari

Sono discreti e limitati dalla teoria quantistica.

Sono differenti da nucleo a nucleo ed anche per isotopi dello stesso elemento.

Esiste, invece, una analogia per i nuclei speculari, ossia per quegli elementi che si trovano mediante scambio di un nucleone. Per esempio il ^{11}B ed il ^{11}C :

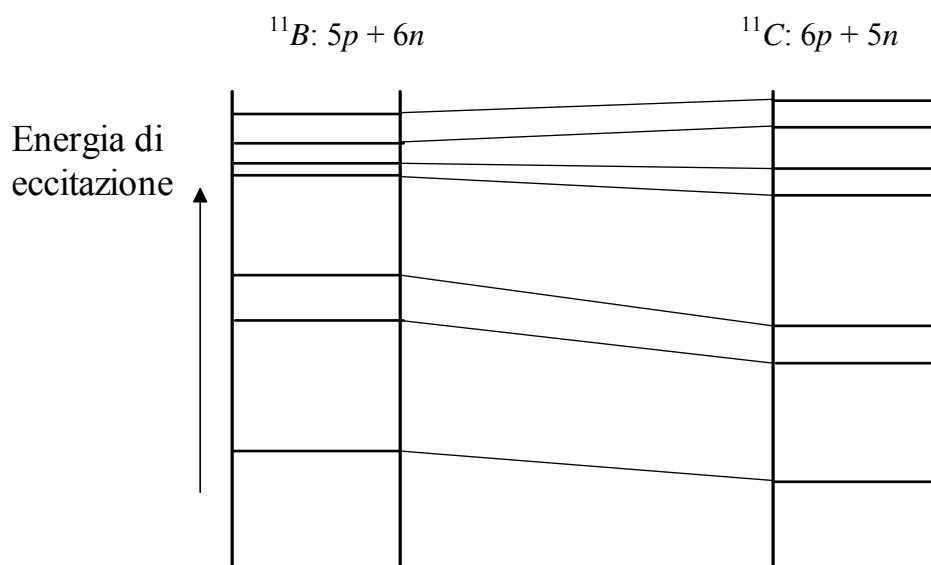


Fig. 1.3 - Stati energetici del ^{11}B e del ^{11}C rispettivamente

Questa simmetria è una delle prove più valide a favore dell'esistenza di una unica forza fondamentale nucleone-nucleone ($N-N$) indipendente dal fatto che la coppia tra cui si esercita sia $p-p$, $p-n$ o $n-n$.

La forza $N-N$ è detta a corto raggio d'azione perché attrattiva per distanze dell'ordine di $10^{-15} m$, è nulla per distanze di alcuni $10^{-15} m$ e diventa repulsiva a circa $10^{-14} m$ (Fig. 1.4).

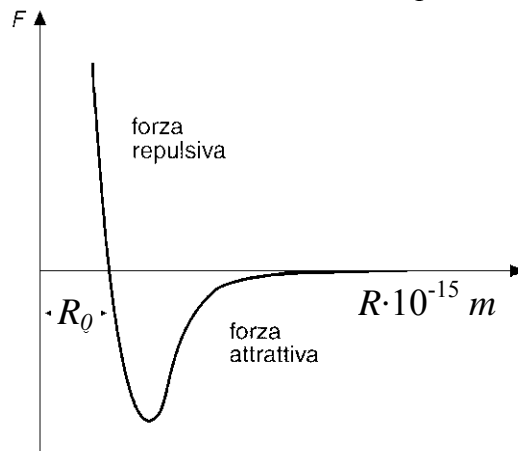


Fig. 1.4 - Andamento qualitativo della forza nucleare

Transizioni nucleari

Comportano emissione di fotoni, come per gli atomi, ma le energie in gioco sono molto più elevate, dell'ordine dei MeV (da $\approx 1 MeV$ a $\approx 10 MeV$), per cui si parla di emissione di raggi γ (*gamma*).

Lo schema energetico del ^{10}B (Fig. 1.5) è esemplificativo delle possibili transizioni tra i livelli energetici con emissione di raggi γ .

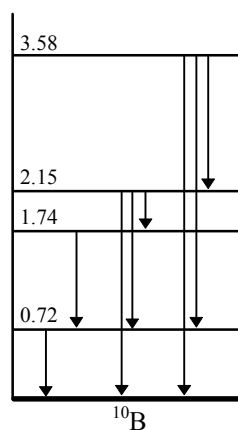
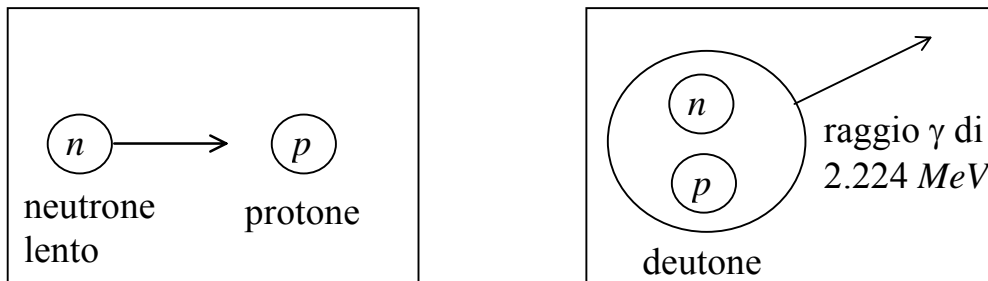


Fig. 1.5 - Stati energetici del ^{10}B in MeV . Le frecce indicano le possibili emissioni γ .

Masse nucleari

Se si effettua un bilancio tra la somma delle masse di un neutrone ed un protone e la massa di un deutone, formato da un n ed un p , si osserva che manca una certa quantità di massa (*missing mass*):



$$\begin{aligned}
 m_H &= 1.007825 \text{ uma} + \\
 m_n &= 1.008665 \text{ uma} = \\
 \hline
 m_H + m_n &= 2.016490 \text{ uma} & m_D &= 2.014102 \text{ uma}
 \end{aligned}$$

$$(m_H + m_n) > m_D \quad (m_H + m_n) - m_D = 0.002388 \text{ uma: } \underline{\text{difetto di massa}}$$

Questo difetto di massa costituisce l'energia di legame del deutone. Infatti, utilizzando la nota relazione di Einstein $E = mc^2$, si ottiene

$$E_{\text{legame}} = [(m_H + m_n) - m_D] \cdot c^2 = 2.224 \text{ MeV}$$

L'energia equivalente ad una unità di massa atomica sarà quindi

$$\begin{aligned}
 1 \text{ uma} \cdot c^2 &= (1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}_m) \cdot (2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \cdot 1 \text{ Mev} / 1.6022 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \\
 &= 931.5 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

In generale si può dire che l'energia di legame di un isotopo divisa per il numero di nucleoni costituenti è data mediamente da:

$$\text{energia di legame} / \text{nucleone} \approx 8 \text{ MeV} / \text{nucleone}$$

Osservando la [Fig. 1.6](#), si nota che esistono alcuni picchi corrispondenti a nuclei particolarmente stabili, come per esempio lo ${}^4\text{He}$, la cui corrispondente energia di legame per nucleone è di $\approx 19.8 \text{ MeV}$. Questo nucleo è infatti conosciuto come particella α (*alfa*).

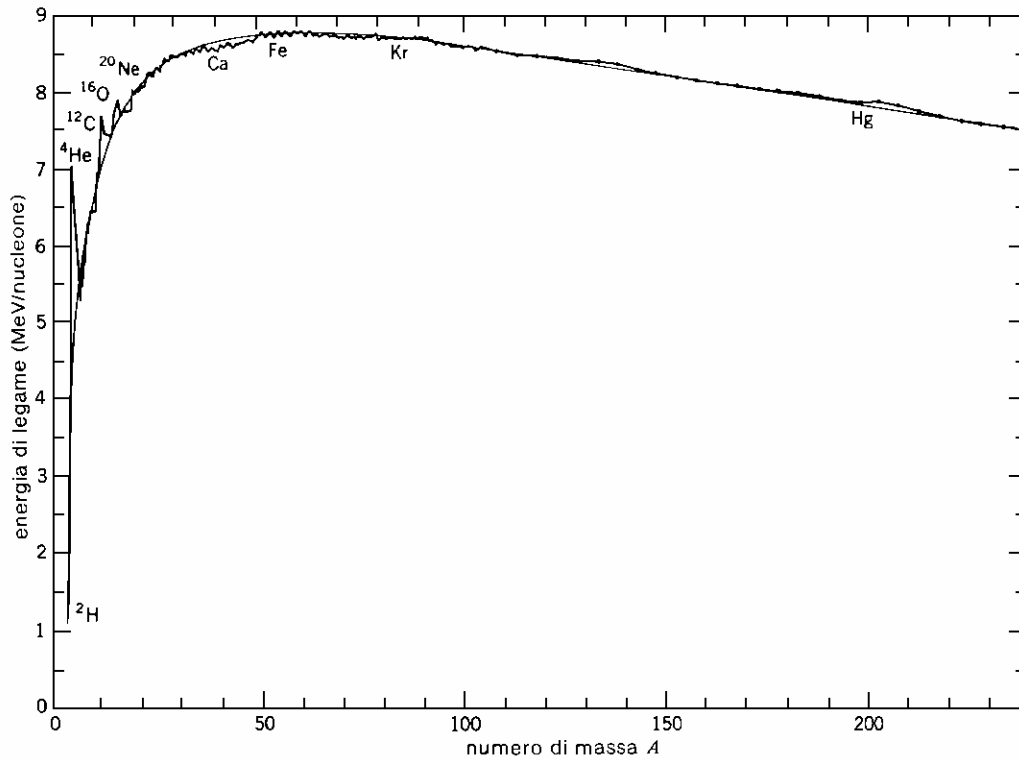


Fig. 1.6 - Energia di legame dei nuclei in funzione del numero di massa A

Dall'osservazione di Fig. 1.6 risulta anche che l'energia di legame per nucleone decresce al crescere del numero di massa A e ciò avviene per due motivi principali:

1. le forze nucleari fra coppie $N-N$, come si è detto, sono a corto raggio, mentre la forza repulsiva di *Coulomb* fra $p-p$ prevale a più lunga distanza (Fig. 1.6b);
2. il principio di esclusione di *Pauli* limita il numero di nucleoni che possono occupare lo stesso stato energetico. I nuclei, perciò, sono stabili solo per

$$Z < 83 \quad \text{e} \quad A < 210$$

Se si riportano su un grafico i nuclei conosciuti in funzione del numero di protoni Z (Fig. 1.7), si nota che fino ad $A \approx 40$ la crescita dei **nuclei stabili** mostra una parità tra p e n (bisettrice), mentre per $A > 40$ il numero di neutroni aumenta più che il numero di p , per bilanciare la repulsione coulombiana a lunga distanza fra i p .

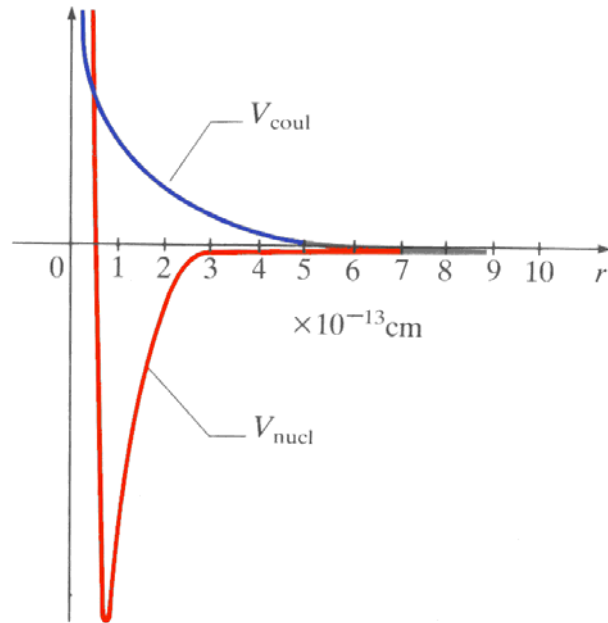


Fig. 1.6b – Confronto tra forza nucleare (a corto range) e forza colombiana (a lungo range).

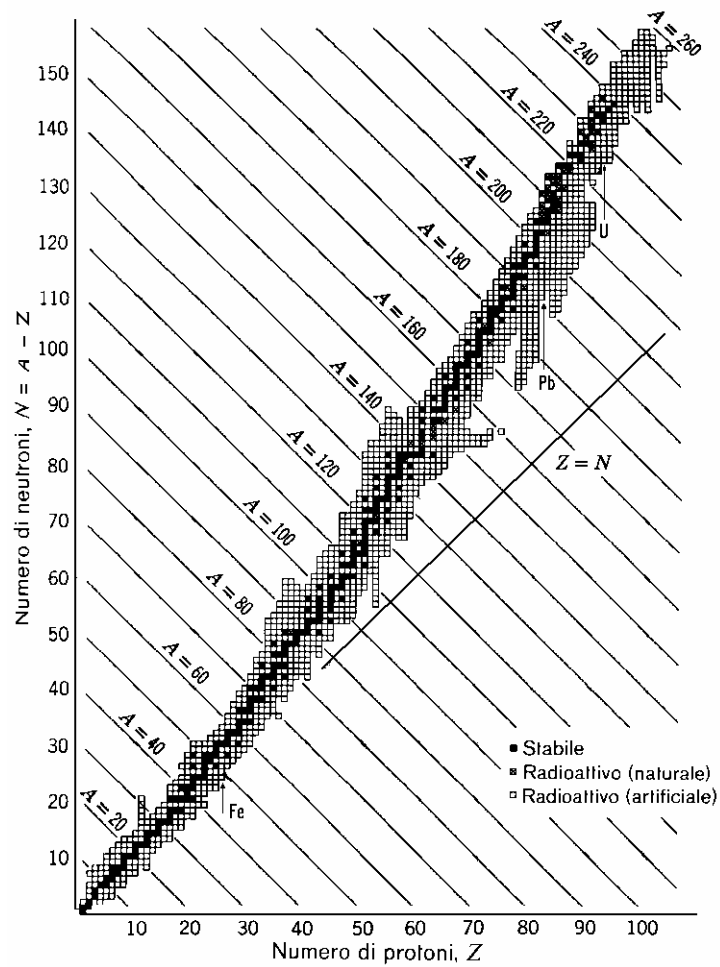


Fig. 1.7 - La valle di stabilità

La zona occupata dai nuclei stabili è detta **valle di stabilità**.

I nuclei che si trovano al di sopra o al di sotto della valle di stabilità sono **instabili** e soggetti, quindi, a trasformarsi in altri nuclei più stabili mediante i **decadimenti** (vedasi in Fig. 1.8 la catena naturale di decadimento dell' ^{238}U) :

- i nuclei che si trovano al di sopra o a sinistra della valle di stabilità hanno un eccesso di neutroni: decadimenti β^- (*beta meno*), ossia emettono un β^- ;
- i nuclei che si trovano al di sotto o a destra della valle di stabilità hanno un eccesso di protoni: decadimenti β^+ (*beta più*), ossia emettono un β^+ ;
- i nuclei più pesanti: decadimenti α od anche fissione spontanea.

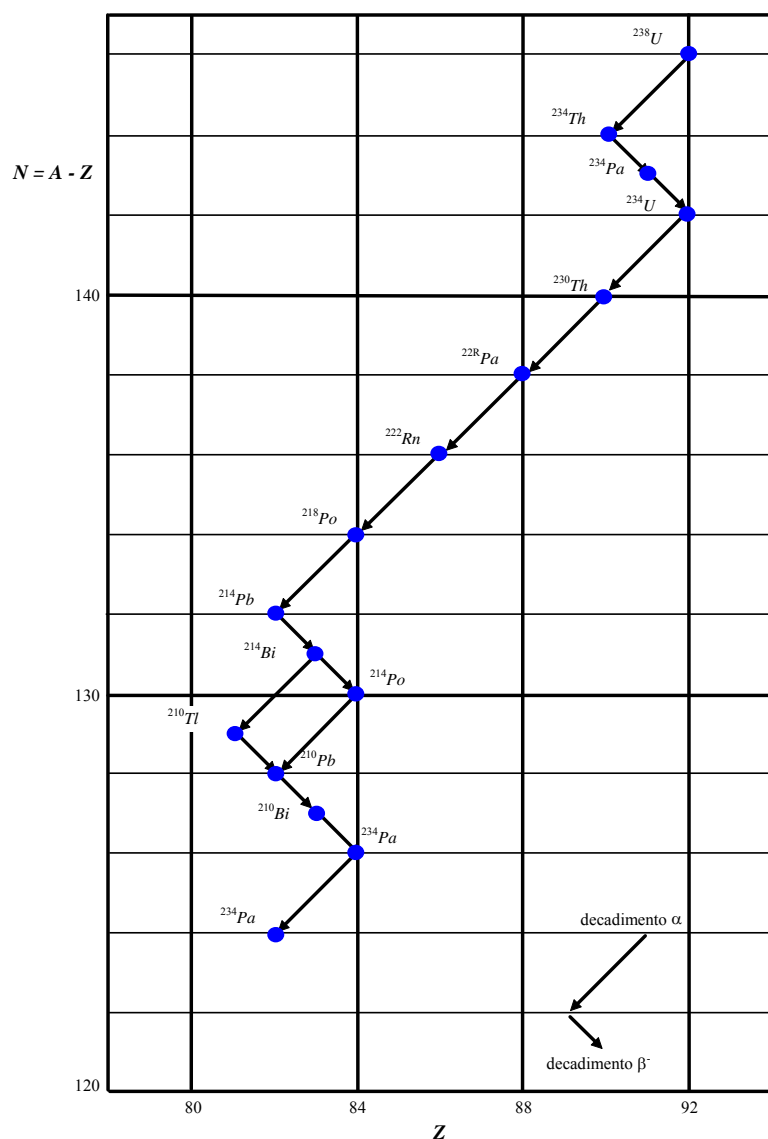
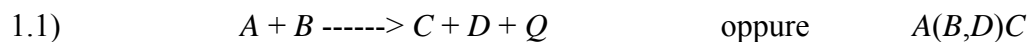


Fig. 1.8 - Catena naturale di decadimento dell' ^{238}U

1.4 - Reazioni Nucleari

Una reazione nucleare è prodotta in generale da un nucleo B (proiettile) che, collidendo su un nucleo A (bersaglio o, in inglese, *target*), genera due altri nuclei C e D (prodotti della reazione). Le notazioni in uso sono le seguenti:



Il Q della reazione è la differenza tra le masse a riposo iniziali e finali moltiplicata per c^2 (v. la 1.4). Sulla base del valore di Q , esistono due possibilità:

1. la reazione è esoenergetica, ossia produce energia;
2. la reazione è endoenergetica, cioè necessita di un'energia $E=+Q$ per poter aver luogo nel sistema del baricentro.

Nelle reazioni nucleari intervengono numerose leggi di conservazione. Le principali sono qui di seguito riportate.

Leggi di conservazione

a- Conservazione dell'impulso.

Detti p_A, p_B, p_C e p_D i vettori impulso di A, B, C e D rispettivamente nella reazione 1.1), si deve avere

$$1.2) \quad \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D$$

cioè la somma vettoriale delle quantità di moto iniziali deve essere uguale alla somma vettoriale delle quantità di moto dei prodotti della reazione.

b- Conservazione dell'energia.

E' utile ricordare che più precisamente si deve parlare di conservazione della massa-energia, in quanto la massa può essere trasformata in energia mediante la nota relazione di Einstein

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

in cui $c=3 \cdot 10^8$ m/s è la velocità della luce.

Seguendo l'esempio 1.1), deve essere

$$1.3) \quad T_A + M_A + T_B + M_B = T_C + M_C + T_D + M_D$$

dove T è l'energia cinetica ed M la massa a riposo delle particelle.

Q-valore

Si definisce Q -valore della reazione la quantità

$$1.4) \quad Q = (M_A + M_B) - (M_C + M_D) = (T_C + T_D) - (T_A + T_B)$$

Le due definizioni sono perfettamente equivalenti. Molto spesso nella pratica Q è ricavato dalla cosiddetta Q -equazione, che è una relazione del tipo

$$Q = f(T_C, M_C, M_D, M_A, \theta)$$

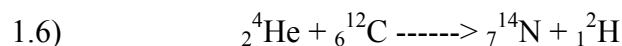
in cui compaiono l'angolo θ , formato dalla direzione del nucleo prodotto C rispetto alla direzione del nucleo incidente A , l'energia cinetica T_C del prodotto C e tre delle quattro masse in gioco. L'utilità di tale relazione è evidente: noti alcuni parametri, essa consente di dedurne semplicemente altri. In particolare, noti T_C , M_C , M_D , M_A e θ si può calcolare il Q della reazione.

c- Conservazione della carica.

La somma delle cariche iniziali Z_i deve essere uguale alla somma delle cariche finali Z_f

$$1.5) \quad \Sigma Z_i = \Sigma Z_f$$

Ad esempio nella reazione



si ha che la carica $\Sigma Z_i = 8 = \Sigma Z_f$ è uguale nello stato iniziale e finale.

d- Conservazione del numero di massa.

La somma dei numeri di massa iniziali A_i deve essere uguale alla somma dei numeri di massa finali A_f

$$1.7) \quad \Sigma A_i = \Sigma A_f$$

Questa legge non è in contrasto col principio di conservazione dell'energia, in quanto richiede solo la conservazione del numero di nucleoni. Nell'esempio 1.6) succitato, il numero di nucleoni A è uguale a 16 nello stato iniziale e finale.

e- Conservazione del momento totale.

Si definisce momento della quantità di moto totale la somma vettoriale della quantità di moto connessa col moto orbitale (L) e quella intrinseca o di spin (S), ossia

$$1.8) \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Questa legge di conservazione afferma che

$$1.9) \quad J_i = J_f$$

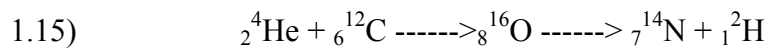
ossia che non si ha variazione di J fra stato iniziale e finale. Va sottolineato esplicitamente che in generale non sarà vero che

$$L_i = L_f \qquad S_i = S_f$$

perché ciò che si deve conservare è la somma vettoriale $L+S$ e non singolarmente L e S .

Cenno sui meccanismi di produzione delle reazioni nucleari

Per le reazioni nucleari di bassa energia, di cui essenzialmente ci interessiamo, il meccanismo di base è quello del cosiddetto "nucleo composto", dovuto a N. Bohr. In base a questo meccanismo, si suppone che il passaggio dallo stato iniziale $A+B$ allo stato finale $C+D$ avvenga attraverso uno stadio intermedio di formazione di un nucleo composto ($A+B$). La reazione nucleare 1.6), ad esempio, viene così ad essere descritta attraverso la formazione di un nucleo composto di ${}_8^{16}\text{O}$

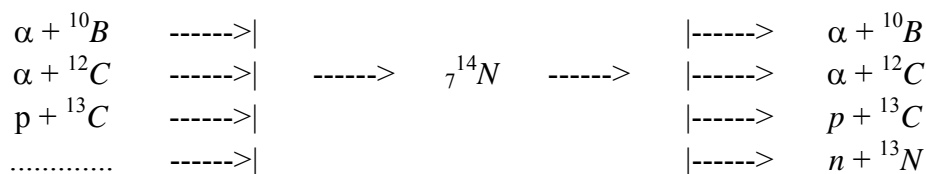


In questo modello l'energia di eccitazione, trasportata dalla particella incidente, non viene ceduta ad un solo nucleone del nucleo urtato, ma viene suddivisa tra tutti i suoi nucleoni. Ciò si ottiene quando la lunghezza d'onda λ del proiettile è molto maggiore delle dimensioni del raggio nucleare R e, precisamente, quando

$$1.16) \quad \frac{\lambda}{2\pi} \gg R$$

Di conseguenza questo meccanismo sarà tanto più valido quanto più è bassa l'energia cinetica del proiettile in quanto $\lambda = h/p = h/\sqrt{2mE}$. Per esempio, nel caso di un protone incidente il modello è soddisfacente per $E_p < 30 \text{ MeV}$.

In questo modello, inoltre, si ammette che non vi sia alcuna correlazione tra i meccanismi di eccitazione e di diseccitazione. Si può dire che, all'atto della diseccitazione, il nucleo composto ha dimenticato come è stato eccitato. Per esempio, si può formare un nucleo ${}_7^{14}\text{N}$ per varie vie ed esso può diseccitarsi ancora attraverso vari canali: ebbene, i canali di uscita sono completamente scorrelati dai canali d'ingresso, per cui la probabilità con cui ${}_7^{14}\text{N}$ si diseccita attraverso una via è indipendente dal canale di formazione.



Affinché ciò avvenga, il tempo d'interazione τ deve essere molto più grande del tempo di attraversamento $t \sim R/v$ del nucleo e quindi

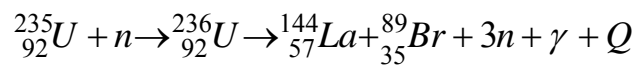
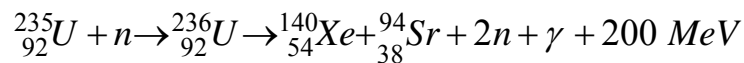
$$1.17) \quad t \approx \frac{R}{v} \ll \tau \quad \tau \approx 10^{-6} s$$

Nell'esempio già citato di un protone d'energia inferiore a 30 MeV, il rapporto $R/v \sim 10^{-22} s$, per cui risultano verificate entrambe le condizioni 1.16) e 1.17).

Fissione

Come si è visto (Fig. 1.6), per un nucleo pesante ($A \approx 240$) l'energia di legame è ≈ 7.5 Mev/nucleone. Quando un tale nucleo viene scisso in due parti, ciascuna con $A \approx 120$, l'energia di legame aumenta, diventando ≈ 8.5 Mev/nucleone, liberando una quantità di energia pari a ≈ 1 Mev/nucleone.

Le tipiche reazioni utilizzate sono



e lo schema della reazione, attraverso il meccanismo del nucleo composto, è riportato in Fig. 1.9.

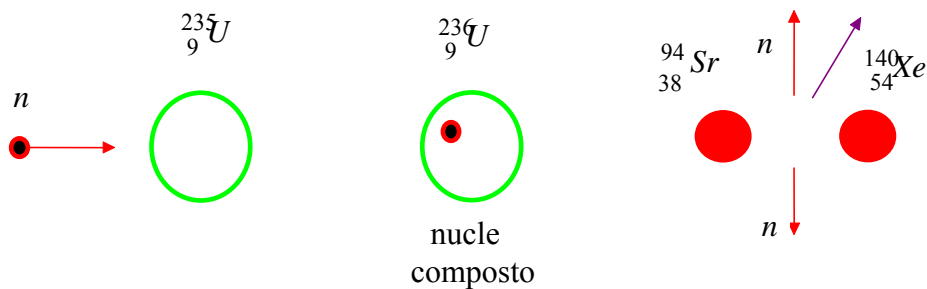


Fig. 1.9 - Schema della reazione $n + {}_{92}^{235}\text{U}$ attraverso la formazione del nucleo composto di ${}_{92}^{236}\text{U}$

Se la massa del materiale in cui avviene la fissione è sufficientemente grande da assorbire tutti i prodotti di fissione, una energia di circa 190 MeV si converte in energia termica (Tab. 1)

Tab. 1 - Distribuzione dell'energia tra i prodotti della fissione dell' $^{235}_{92}\text{U}$

Prodotti	Energia media (MeV)
Frammenti di fissione (energia cinetica)	168
Neutroni di fissione (energia cinetica)	5
Raggi γ (istantanei)	5
Raggi β^- emessi dai frammenti di fissione (energia cinetica)	5
Raggi γ emessi dai frammenti di fissione	7
Neutrini emessi dai decadimenti β^-	10
TOTALE	200

Il processo di fissione, liberando più neutroni dotati di energia cinetica, consente loro di produrre successive fissioni, dando luogo ad un processo a catena, che, se controllato (reattori a fissione), produce una elevata quantità di energia utilizzabile per scopi pacifici (produzione di energia elettrica).

Se il processo non è controllato si può giungere all'esplosione.

Fusione

Nella fusione il processo è inverso rispetto alla fissione: due nuclei leggeri si uniscono (fondono) formando un nucleo più pesante con maggiore energia di legame e liberando energia.

E' la reazione nucleare che avviene nel sole e nelle altre stelle, con produzione di una enorme quantità di energia.

Nella reazione di fusione nuclei di elementi leggeri, quali l'idrogeno, a temperature e pressioni elevate, fondono formando nuclei di elementi più pesanti come l'elio.

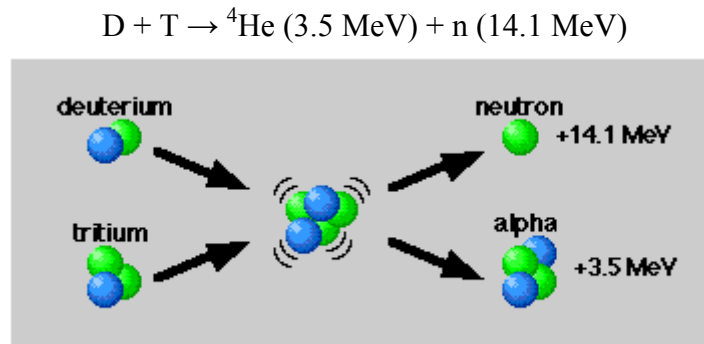
Sono noti tre isotopi dell'idrogeno: l'idrogeno propriamente detto (H), il deuterio (D) e il trizio (T). Il nucleo di tutti e tre contiene un protone, il che li caratterizza come forme dell'elemento idrogeno; il nucleo di deuterio contiene inoltre un neutrone mentre quello del trizio due neutroni. In tutti i casi l'atomo neutro ha un elettrone al di fuori del nucleo per compensare la carica del singolo protone.

La reazione più probabile è quella che avviene tra un nucleo di deuterio e un nucleo di trizio, reazione in cui si genera un nucleo di elio (particella alfa) e un neutrone. In questa reazione la massa complessiva dei prodotti è inferiore a quella delle particelle interagenti e si verifica liberazione di energia secondo il principio di equivalenza massa-energia (*relazione di*

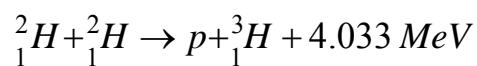
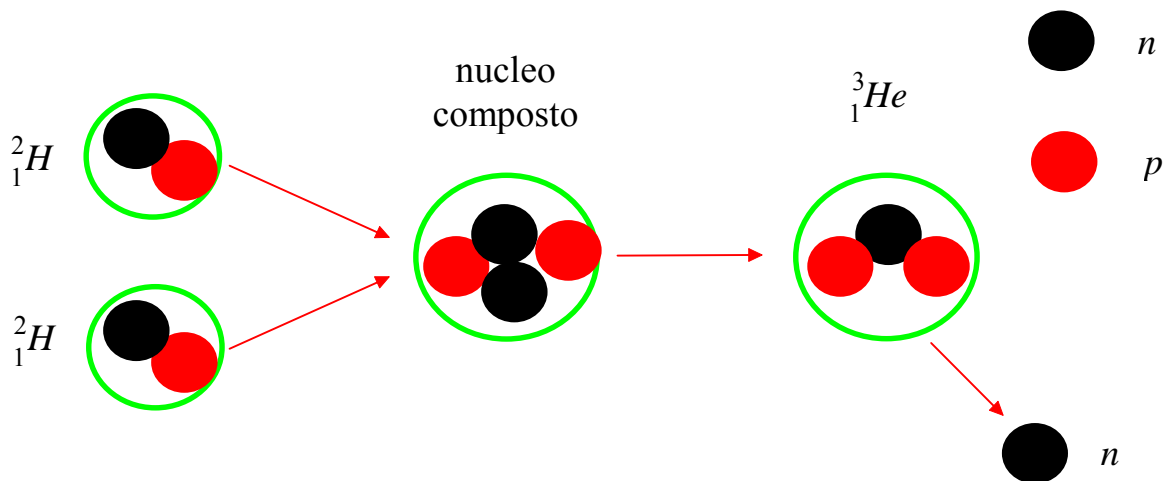
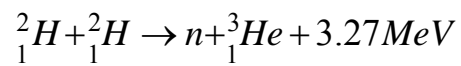
Einstein $E = mc^2$). L'energia liberata si distribuisce tra la particella alfa e il neutrone in rapporto inverso alle rispettive masse.

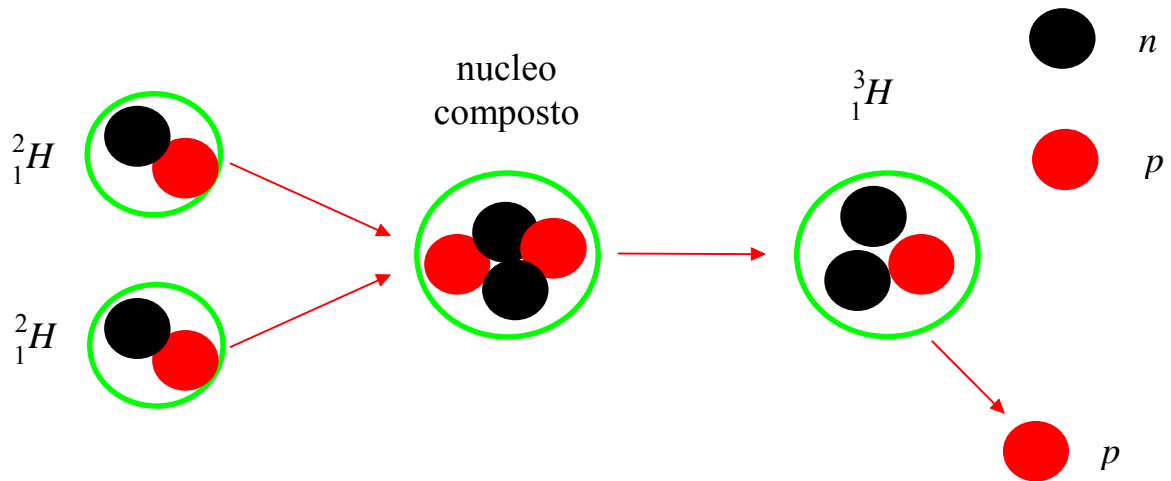
Le reazioni più interessanti per la fusione controllata utilizzano il deuterio e sono:

reazione D-T (la soglia più bassa, ~50 keV)



reazioni D-D (le due reazioni sono equiprobabili)





nelle quali per fusione di due nuclei di deuterio viene liberata un'energia media di ≈ 1 *Mev*/nucleone, comparabile cioè con quella ottenuta nella fissione di un elemento pesante. Anche questa energia è utilizzabile per la produzione di energia elettrica attraverso i tipici processi di trasformazione

energia nucleare \Rightarrow energia termica \Rightarrow energia meccanica \Rightarrow energia elettrica

Appendice 1 – ELENCO ALFABETICO DEGLI ELEMENTI

(basati sulla massa atomica relativa del C-12 = 12)

Z = numero atomico

A = massa atomica

Z	Sim	A	Elemento	Z	Sim	A	Elemento
89	Ac	227	attinio	31	Ga	70	gallio
47	Ag	108	argento	64	Gd	157	gadolinio
13	Al	27	alluminio	32	Ge	73	germanio
95	Am	243	americio	1	H	1	idrogeno
18	Ar	40	argon	2	He	4	elio
33	As	65	arsenico	72	Hf	178	afnio
85	At	210	astatine	80	Hg	201	mercurio
79	Au	197	oro	67	Ho	165	olmio
5	B	10	boro	53	I	127	iodio
56	Ba	137	bario	49	In	115	indio
4	Be	9	berillio	77	Ir	192	iridio
83	Bi	209	bismuto	19	K	39	potassio
97	Bk	247	berkelio	36	Kr	84	cripton
35	Br	80	bromo	57	La	139	lantanio
6	C	12	carbonio	3	Li	7	litio
20	Ca	40	calcio	103	Lr (Lw)	260	laurenzio
48	Cd	112	cadmio	71	Lu	174	lutezio
58	Ce	140	cerio	101	Md	258	mendelevio
98	Cf	251	californio	12	Mg	24	magnesio
17	Cl	35	cloro	25	Mn	55	manganese
96	Cm	247	curio	42	Mo	96	molibdeno
27	Co	59	cobalto	7	N	14	azoto
24	Cr	52	cromo	11	Na	22	sodio
55	Cs	133	cesio	41	Nb	93	niobio
29	Cu	64	rame	60	Nd	144	neodimio
66	Dy	162	disprosio	10	Ne	20	neon
68	Er	167	erbio	28	Ni	59	nicel
99	Es	252	einstenio	102	No	259	nobelio
63	Eu	152	europio	93	Np	237	nettunio
9	F	19	fluoro	8	O	16	ossigeno
26	Fe	56	ferro	76	Os	190	osmio
100	Fm	257	fermio	15	P	31	fosforo
87	Fr	223	francio	91	Pa	231	protoattinio
82	Pb	207	piombo	37	Rb	85	rubidio
46	Pd	106	palladio	75	Re	186	renio
61	Pm	147	promezio	45	Rh	103	rodio
84	Po	210	polonio	86	Rn	222	radon
59	Pr	141	praseodimio	44	Ru	101	rutezio
78	Pt	195	platino	16	S	32	zolfo
94	Pu	244	plutonio	51	Sb	122	antimonio
88	Ra	226	radio	21	Sc	45	scandio

34 Se 79	selenio	81 Tl 204	tantalio
14 Si 28	silicio	69 Tm 169	tulio
62 Sm 150	samario	92 U 238	uranio
50 Sn 119	stagno	23 V 51	vanadio
38 Sr 88	stronzio	74 W 184	volframio
73 Ta 181	tantalio	54 Xe 131	xenon
65 Tb 159	torbio	39 Y 89	ittrio
43 Tc 98	tecnezio	70 Yb 173	iterbio
52 Te 128	tellurio	30 Zn 65	zinco
90 Th 232	torio	40 Zr 91	zirconio
22 Ti 48	titanio		

Cap. 2 - I decadimenti radioattivi

Introduzione	29
2.1 - Natura delle radiazioni α, β e γ	29
2.2 - Legge di decadimento	30
2.3 - Catene radioattive	33
2.4 - Equilibrio ideale	36
2.5 - Equilibrio secolare	37
2.6 - Equilibrio transiente	39
2.7 - Decadimento α	41
2.8 - Decadimenti β	42
2.9 - Emissione γ	45

Introduzione

La radioattività fu scoperta nel 1896 da H. Becquerel partendo dall'osservazione che alcune sostanze, quali i sali di uranio, erano in grado di impressionare una lastra fotografica se poste in vicinanza di essa. In seguito si verificò che questo fenomeno era dovuto a radiazioni di diverso tipo, chiamate poi α , β e γ , emesse dai nuclei. Si vide, inoltre, che uno stesso nucleo poteva emettere contemporaneamente diversi tipi di radiazione, come raggi β e raggi γ . Vediamo ora le proprietà e la natura di queste radiazioni.

2.1 - Natura delle radiazioni α , β e γ

Segno della carica.

Per individuare il segno della carica dei tre tipi di radiazione, si utilizza la deviazione che queste subiscono nell'attraversare un campo magnetico H . Il dispositivo è rappresentato schematicamente in Fig. 2.1. La sorgente radioattiva è contenuta in un "pozzo" di piombo, dotato di un foro atto a collimare la radiazione da studiare in una determinata direzione. Normalmente a questa direzione agisce un campo magnetico H , che curva la traiettoria delle particelle cariche con la **forza di Lorentz** e lascia indisturbata quella della radiazione neutra. Una lastra fotografica consente di rivelare i punti di impatto delle particelle. In tutto il recipiente contenente il pozzo e la lastra fotografica viene fatto il vuoto per evitare le **interazioni** delle particelle con atomi o molecole di aria.

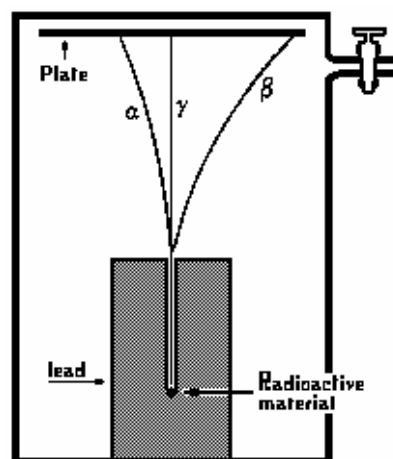


Fig. 2.1 - Traiettorie dei raggi α , β e γ in un campo magnetico entrante perpendicolarmente nel foglio.

In queste ricerche si osserva che, mentre i raggi γ non sono deviati, le particelle α e β subiscono deviazioni in direzioni opposte a causa della **forza di Lorentz**

$$2.1) \quad F = q|\vec{v} \wedge \vec{B}| = qv\mu_0 H$$

e si desume quindi che:

1. i raggi γ non possiedono carica elettrica;
2. i raggi α e β hanno carica di segno opposto.

La natura dei raggi γ è stata messa in evidenza studiandone il comportamento nelle **interazioni** con la materia (misure di assorbimento in vari materiali) e se ne è dedotto che trattasi di radiazione elettromagnetica di frequenza più elevata di quella dei raggi X. La natura dei raggi α e β è stata precisata dalle misure del rapporto q/m .

2.2 - Legge di decadimento

Dopo la scoperta delle possibili emissioni α , β o γ da parte delle sostanze radioattive, sorse il problema di stabilire se tali emissioni fossero dovute all'intera struttura atomica o molecolare delle sostanze oppure al solo nucleo. Si constatò che, cambiando la pressione o qualunque altro parametro fisico che non riguardasse direttamente il nucleo, ma piuttosto la struttura molecolare attorno ad esso (per esempio, gli elettroni orbitali), i fenomeni radioattivi restavano immutati. Dalle esperienze dei coniugi Curie risultò inoltre che, analizzando diversi sali di uranio, la loro radioattività dipende solo dal numero di nuclei di uranio presenti nell'unità di volume e non dalla loro struttura chimica. In definitiva risulta che la radiazione è emessa dal nucleo.

La legge fondamentale della radioattività è la **legge di decadimento**: la probabilità di decadimento di una sostanza [cioè il numero di nuclei della sostanza, che decadono al tempo t nell'unità di tempo, diviso il numero totale N dei nuclei presenti al tempo t : $(1/N) \cdot (dN/dt)$] è una costante tipica dell'elemento, ma indipendente dal tempo t . Essa è detta **costante di disintegrazione λ (lambda)**:

$$2.17) \quad \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \lambda$$

La costante di disintegrazione λ si misura in $[s^{-1}]$.

Se tale legge viene integrata, si ottiene la tipica legge esponenziale di decadimento (**Fig. 2.7 in alto**)

$$2.19) \quad N = N_0 e^{-\lambda t}$$

dove N_0 è il numero di nuclei della sostanza all'istante iniziale $t=0$. La 2.19) può anche scriversi

$$\ln N = \ln N_0 - \lambda t$$

che in un diagramma $(\ln N, t)$ è rappresentata da una retta di pendenza λ (Fig. 2.7 in basso).

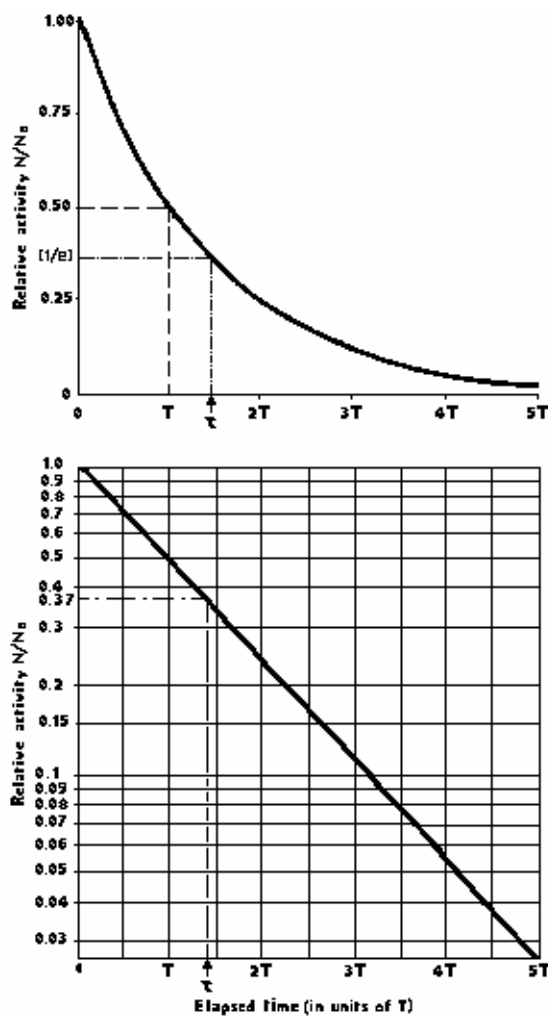


Fig. 2.7 - Curva di decadimento: in alto è rappresentata su carta lineare, in basso su carta semilogaritmica.

Si definisce **attività** (*Att.*) di una sostanza A il numero di disintegrazioni che essa emette nell'unità di tempo. Per la 2.17), questa grandezza è uguale al prodotto della **costante di disintegrazione** per il numero di nuclei presenti all'istante t :

$$2.20) \quad \text{Att. } A = \lambda N = -\frac{dN}{dt}$$

Se scriviamo la 2.19) nella forma

$$2.23) \quad N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

troviamo una nuova definizione di vita media: essa è il tempo necessario affinché il numero iniziale dei nuclei dell'elemento si riduca di $1/e$, come si verifica immediatamente ponendo $t=\tau$ nella 2.23).

L'attività si misura in numero di disintegrazioni al secondo [s^{-1}],.

Il **tempo di dimezzamento** T , invece, rappresenta il tempo necessario affinché il numero iniziale di nuclei N_0 si riduca alla metà. Ponendo $N = N_0/2$ nella 2.23), si ha

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{T}{\tau}}$$

e quindi

$$2.24) \quad T = \ln 2 \tau = 0.693 \cdot \tau$$

per cui risulta che il tempo di dimezzamento T è 0.693 volte la **vita media** τ dell'elemento.

Il tempo di dimezzamento T è misurato in [s].

Si definisce inoltre **vita media** τ la media dei tempi necessari perchè decada ognuno dei nuclei di una data sostanza radioattiva. Se $-dN/dt$ sono i nuclei che, dopo aver vissuto un tempo t , decadono nell'intervallo tra t e $t+dt$ e se N_0 è il numero iniziale dei nuclei, la vita media della sostanza sarà evidentemente, per definizione di media,

$$2.21) \quad \tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \left(-\frac{dN}{dt} \right) dt$$

che, per le 2.18) e 2.19), diviene

$$\tau = \frac{1}{N_0} \lambda \int_0^{\infty} N t \, dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} \, dt$$

Si ricava

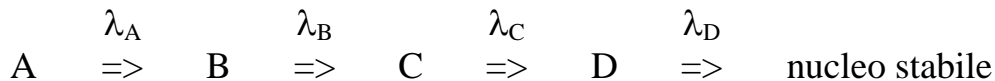
$$2.22) \quad \tau = \frac{1}{\lambda}$$

In definitiva, la vita media τ di una sostanza è l'inverso della sua **costante di disintegrazione** λ .

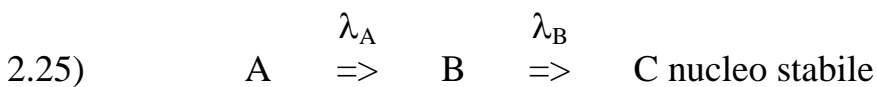
La vita media τ è misurata in [s].

2.3 - **Catene radioattive**

Prendiamo in esame un nucleo A che decade in un altro nucleo B con costante di decadimento λ_A ; può accadere che anche il nucleo B sia radioattivo e decada con costante λ_B in un nuovo nucleo C , che poi C decada con λ_C nel nucleo D e così via, finchè si arriva ad un nucleo stabile finale, la cui costante di decadimento è uguale a zero. Si ha così una catena radioattiva del tipo



Per semplicità di calcoli ci possiamo limitare al caso ridotto (la generalizzazione è concettualmente semplice) di un nucleo progenitore A , un nucleo figlio B ed infine un nucleo stabile C secondo il seguente schema



Nello studiare le leggi di decadimento di questa catena radioattiva, per semplificare ulteriormente le formule poniamo che all'inizio vi sia un numero A_0 di nuclei A e non vi siano affatto nuclei B e C ; cioè

$$2.26) \quad t = 0 \quad \begin{cases} A = A_0 \\ B_0 = C_0 = 0 \end{cases}$$

Questo è il tipico caso di una reazione nucleare, in cui, cioè, A sia il prodotto di una reazione nucleare, e quindi l'ipotesi non è tanto restrittiva come si può credere.

La variazione di A nel tempo è

$$2.28) \quad A = A_0 e^{-\lambda_A t}$$

in cui A_0 è il numero di nuclei A all'istante $t=0$.

Troviamo ora la **variazione nel tempo di B**, che può scriversi

$$2.33) \quad B = A_0 \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

Poiché l'attività di A è $A\lambda_A = A_0\lambda_A e^{-\lambda_A t}$ e l'attività di B è $B\lambda_B$, la 2.33) può scriversi, in termini di attività,

$$2.34) \quad Att.B = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} Att.A [1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t}]$$

Mentre la 2.33) dice come varia nel tempo il numero di nuclei della sostanza B in funzione delle costanti λ_A e λ_B , la 2.34) mostra come varia nel tempo l'attività di B in funzione dell'attività di A e delle stesse costanti λ_A e λ_B .

La variazione di C nel tempo

$$2.35) \quad C = A_0 \left(1 + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_B t} - \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} \right)$$

Questa espressione fornisce la variazione nel tempo del numero di nuclei del tipo C in funzione delle costanti λ_A , λ_B e del numero iniziale A_0 di nuclei del progenitore A .

Se si rappresentano le funzioni $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$, si ottengono curve del tipo di quelle riportate in [Fig. 2.8](#).

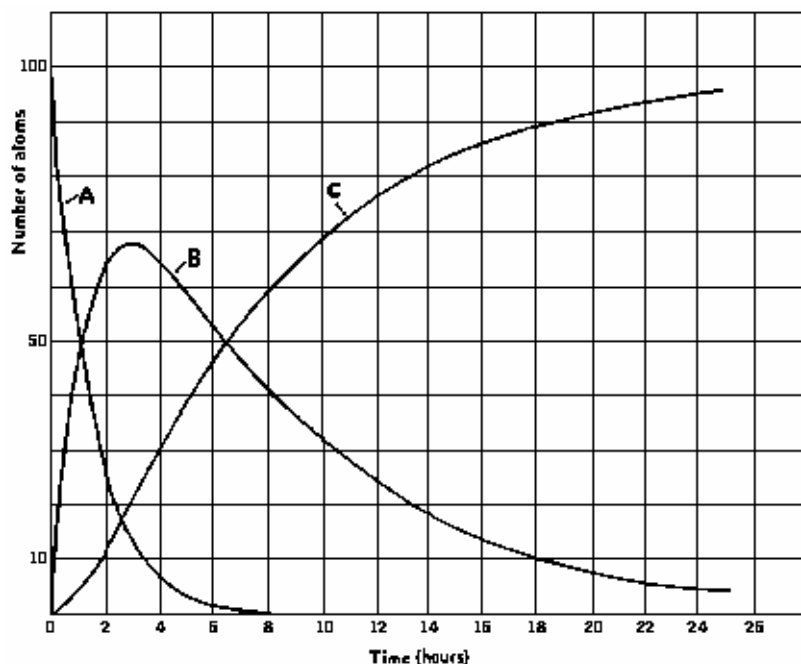


Fig.2.8 - Serie radioattiva con tre membri: solo il genitore A ($T=1$ ora) è presente inizialmente; il figlio B ha $T=5$ ore e il terzo elemento è stabile.

Nella tabella seguente sono riassunti solo alcuni dati essenziali quali: il nucleo capostipite di ciascuna catena (è riportata anche una serie artificiale: quella del nettunio, elemento transuranico preparato artificialmente), il suo tempo di dimezzamento T e il nucleo stabile con cui termina la catena.

Capostipite	T	Nucleo stabile
${}_{92}^{238}\text{U}$	$4.5 \cdot 10^9$ anni	${}_{82}^{206}\text{Pb}$
${}_{92}^{235}\text{U}$	$7.1 \cdot 10^8$ anni	${}_{82}^{207}\text{Pb}$
${}_{90}^{232}\text{Th}$	$1.39 \cdot 10^{10}$ anni	${}_{82}^{208}\text{Pb}$
${}_{93}^{237}\text{Np}$	$2.2 \cdot 10^6$ anni	${}_{83}^{209}\text{Bi}$

2.4 - Equilibrio ideale

Come visto nel paragrafo 2.2, l'attività $\lambda_B B$ di B inizia da zero per $t=0$, se vale la condizione iniziale $B_0=0$, e torna a zero per $t \rightarrow \infty$. Ad un certo istante intermedio t_m raggiunge appunto un massimo. L'istante t_m in cui la sostanza figlia B ha la massima attività è quello per cui si ha che al tempo $t = t_m$ le due attività del nucleo madre e del nucleo figlio sono uguali (Fig. 2.12), ossia

$$2.42) \quad \text{Att.}A = \text{Att.}B \quad \text{per } t = t_m$$

Questa condizione di equilibrio fra le attività di A e di B è chiamata di **equilibrio ideale** in quanto si verifica solo ad un determinato istante. Dalla 2.33) è possibile verificare che, per $t < t_m$, $dB/dt > 0$, mentre $dB/dt < 0$ per $t > t_m$. Questo fatto è esprimibile in termini di attività affermando che per $t < t_m$ l'attività di A (genitore) è maggiore dell'attività di B (figlio) e viceversa per $t > t_m$ (Fig. 2.12). Suddividendo il tempo in tre parti, si ha quindi

$$2.43) \quad \begin{array}{ccc} 0 \div t_m & t_m & t_m \div \infty \\ \text{Att.}A > \text{Att.}B & \text{Att.}A = \text{Att.}B & \text{Att.}A < \text{Att.}B \\ & \text{equilibrio} & \\ & \text{ideale} & \end{array}$$

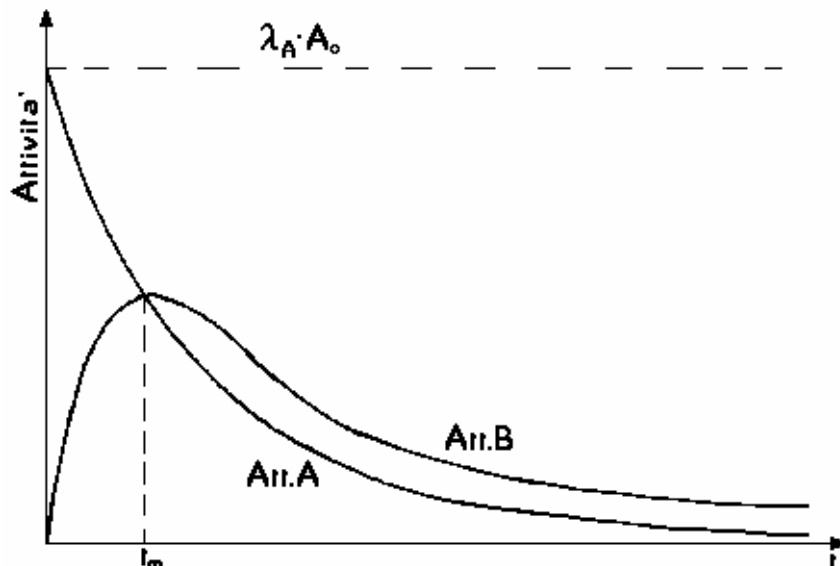
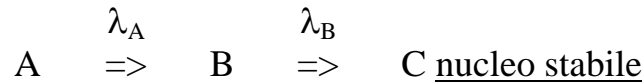


Fig. 2.12 - Caso di equilibrio ideale a $t=t_m$ per il radionuclide A (nucleo genitore) e B (nucleo figlio).

2.5 - Equilibrio secolare

Torniamo al problema della catena radioattiva



per la quale abbiamo calcolato l'andamento del numero di nuclei in funzione del tempo (si vedano le 2.28) e 2.33), che qui riuniamo)

$$A = A_0 e^{-\lambda_A t}$$

2.44)

$$B = A_0 \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

Facciamo l'ipotesi particolare che la vita media di A sia praticamente infinita e molto maggiore della vita media del nucleo figlio; cioè

$$2.45) \quad \begin{array}{|l} |\tau_A \sim \infty \\ | \\ |\tau_A \gg \tau_B \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{|l} |\lambda_A \sim 0 \\ | \\ |\lambda_A \ll \lambda_B \end{array}$$

Sotto tale ipotesi si ottiene $\lambda_B B \sim \lambda_A A$ e cioè

$$\frac{dB}{dt} = \lambda_A A - \lambda_B B \approx 0 \quad \underline{t \gg \tau_B}$$

Si raggiunge, quindi, una condizione di equilibrio, cui corrisponde l'eguaglianza tra le due attività $\lambda_A A \sim \lambda_B B$. Questa condizione di regime si raggiunge per tempi sufficientemente lunghi ($t \gg \tau_B$), come si è visto, ed è perciò detta di **equilibrio secolare**. L'andamento delle attività di A e di B è riportato in [Fig. 2.13](#); vale la pena di sottolineare che, essendo $A \sim \text{costante}$ per la 2.46'), l'attività di A risulta una retta quasi parallela all'asse dei tempi.

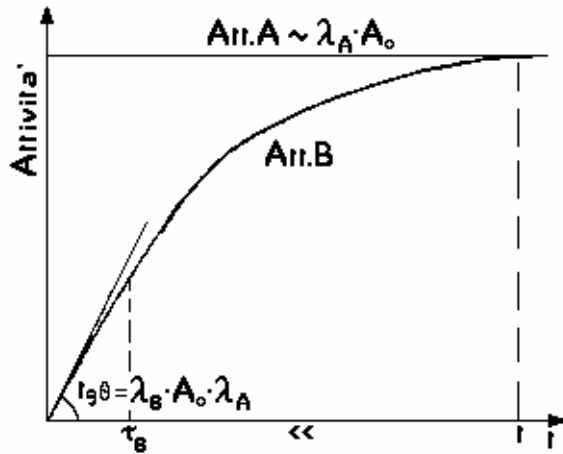


Fig.2.13-Caso di equilibrio secolare a $t \gg \tau_B$.

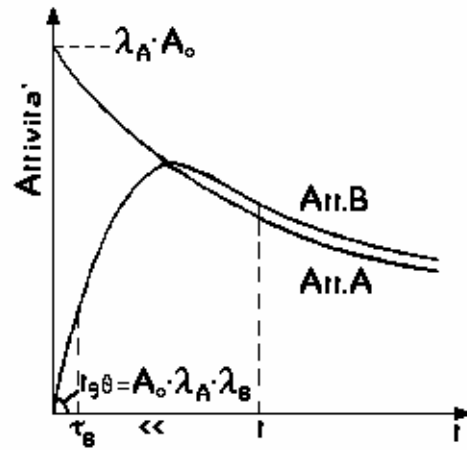


Fig.2.14-Caso di equilibrio transiente a $t \gg \tau_B$.

L'equilibrio secolare è quanto si verifica proprio durante i secoli nelle catene radioattive naturali, che hanno nuclei progenitori a lunghissima vita media (si veda al paragrafo 2.3 la tabella relativa alle famiglie radioattive naturali). Un'applicazione pratica di questa condizione di regime è la possibilità di misurare, mediante la 2.46), la vita media τ_A dei nuclei a vita media molto lunga. Da questa condizione si ha, infatti, che all'equilibrio il rapporto tra il numero di nuclei A e B presenti è uguale al rapporto tra le due vite medie τ_A/τ_B . Quindi

$$2.47) \quad \frac{A(t)}{B(t)} = \frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

per cui, misurati $A(t)$ e $B(t)$ e nota τ_B , si ricava τ_A .

Risulta evidente l'importanza di un tale metodo per la misura di τ_A che, essendo molto grande, non può essere ovviamente determinata con l'usuale tecnica del conteggio nel tempo dell'attività della sostanza A .

2.6 - Equilibrio transiente

Poniamoci ora nelle condizioni che la vita media del nucleo genitore sia molto grande rispetto a quella del nucleo figlio, ma non infinita

$$2.49) \quad \begin{array}{l} |\tau_A < \infty \\ | \\ |\tau_A > \tau_B \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{l} |\lambda_A > 0 \\ | \\ |\lambda_A > \lambda_B \end{array}$$

Le 2.44) saranno ora approssimate, ad un tempo $t \gg \tau_B$, nelle

$$2.50) \quad \begin{array}{l} A = A_0 e^{-\lambda_A t} \\ B \approx A_0 \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} = A \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \end{array} \quad \underline{t \gg \tau_B}$$

e, in termini di attività,

$$2.51) \quad Att.B = Att.A \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}$$

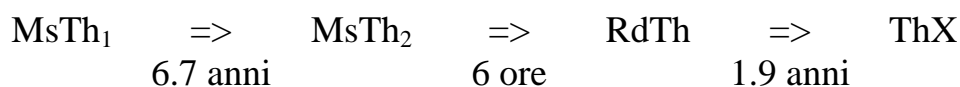
Ciò consente di concludere che, sotto l'ipotesi di validità delle 2.49), si ha sempre

$$\begin{array}{l} | Att.B > Att.A \\ | \\ | Att.B \text{ proporzionale } Att.A \end{array} \quad \text{per } t \gg \tau_B$$

Quindi, in un diagramma di attività in funzione del tempo, dopo un tempo $t \gg \tau_B$ le due curve $Att.A$ e $Att.B$ procedono parallele e la curva relativa a B è più alta di quella relativa ad A (Fig. 2.14). Evidentemente ora la curva dell'attività di A non è più una retta parallela all'asse t perchè $\lambda_A \neq 0$. Si può quindi dire che ora B , una volta raggiunta la condizione di regime $t \gg \tau_B$, varia nel tempo con la vita media del genitore.

In questo caso (come nel generico caso discusso nel paragrafo 2.4 si ha ancora un equilibrio ($dB/dt=0$) in un solo istante, cioè ancora per $t = t_m$ (equazione 2.42). Questa condizione di equilibrio, sotto le condizioni specificate dalle 2.49), si chiama di **equilibrio transiente**.

Un esempio di equilibrio transiente è dato dalla trasformazione del Mesotorio1 (^{228}Ra) in Mesotorio2 (^{228}Io), quindi in Radiotorio (^{228}Th) e infine in TorioX (^{224}Ra); cioè



Poiché il MsTh_2 ha vita molto più breve di quelle del MsTh_1 e RdTh , questo passaggio intermedio non ha peso nell'equilibrio che si viene a stabilire fra il MS Th_1 e il RdTh . Si può quindi pensare ad una catena così fatta



Ci troviamo perciò nel caso di un equilibrio transiente, in cui la vita media del genitore (MsTh_1) è più grande di quella del figlio (RdTh), ma non tanto da potersi considerare infinita. L'andamento nel tempo del numero di nuclei MsTh_1 e RdTh è riportato in [Fig. 2.15](#).

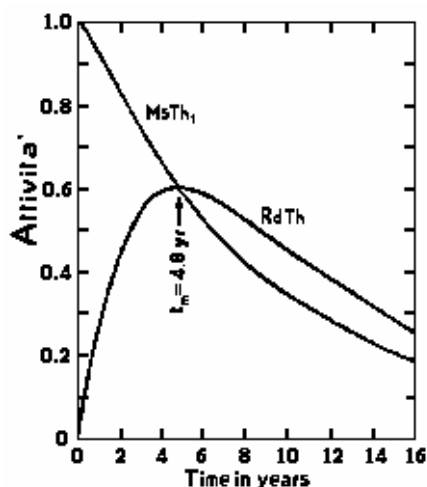


Fig.2.15 - Le attività di una sorgente pura di MsTh e del RdTh prodotto in essa. La massima attività del RdTh si ha dopo 4.8 *anni* e nello stesso istante la sua attività è uguale a quella del genitore (eq. 2.42). In tempi più lunghi l'attività del RdTh approssima il suo valore di equilibrio transiente di 1.39 volte l'attività residua del MsTh .

2.7 - Decadimento α

Come già visto, le particelle α sono atomi di elio ionizzati due volte

$$\alpha = {}_2^4\text{He}^{++}$$

e vengono emesse da nuclei instabili, soprattutto quelli con $A > 200$. Tale emissione diminuisce di 2 la carica iniziale e di 4 il numero di massa. Se indichiamo con (Z,A) il nucleo iniziale e con $(Z-2,A-4)$ il nucleo finale, la condizione che rende possibile un decadimento α è che esista un eccesso di massa tra il nucleo iniziale e i prodotti del decadimento; cioè

$$2.53) \quad m(Z,A) > m(Z-2,A-4) + m({}^4\text{He})$$

o, equivalentemente, che

$$2.54) \quad m(Z,A) - [m(Z-2,A-4) + m({}^4\text{He})] > 0$$

In base a quest'ultima relazione, l'energia disponibile per il decadimento è

$$2.55) \quad E_\alpha = [m(Z,A) - m(Z-2,A-4) - m({}^4\text{He})]c^2$$

Questa energia si ripartisce fra i prodotti secondo la conservazione dell'impulso, per cui il nucleo di rinculo ne assorbe pochissima, essendo molto pesante, mentre la maggior parte viene utilizzata dalle particelle α .

Un esempio di emissione α è fornita dal ${}^{210}\text{Po}$, che con $T=138$ giorni decade in ${}^{206}\text{Pb}$. Se $m(\text{Po})=209.98287$ *uma* (unità di massa atomica, pari a 1/12 della massa del ${}^{12}\text{C}$), $m(\text{Pb})=205.97447$ *uma* e $m({}^4\text{He})=4.00260$ *uma*, applicando la 2.55) si ha

$$E_\alpha = (209.98287 - 205.97707) c^2 = 5.40 \text{ MeV}$$

che è proprio l'energia a disposizione del decadimento. Di essa, 0.10 *MeV* vengono assunti dal rinculo del nucleo di ${}^{206}\text{Pb}$, mentre 5.30 *MeV* sono a disposizione delle α , sempre sotto forma di energia cinetica. Comuni sorgenti α di laboratorio sono il ${}^{226}\text{Ra}$ ($T=1620$ a), utilizzato da Rutherford proprio per studiare la natura di queste particelle, e l' ${}^{241}\text{Am}$ ($T=460$ a), i cui schemi di decadimento sono riportati in [Fig. 2.17](#).

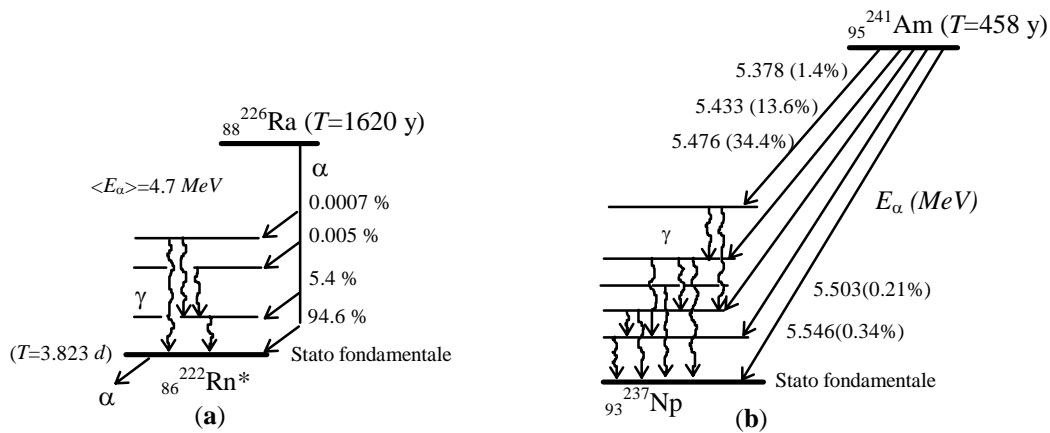
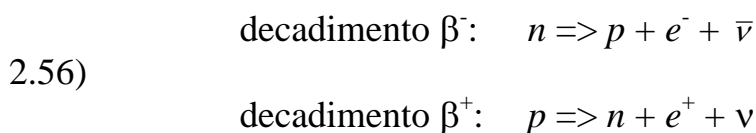


Fig. 2.17 - Schemi di decadimento di comuni sorgenti α : (a) ^{226}Ra e (b) ^{241}Am .

Le particelle α sono in grado di interagire con la materia in quanto **particelle cariche pesanti**.

2.8 - Decadimenti β

I decadimenti β derivano dalla capacità che possiedono i neutroni e i protoni (pur essendo stabili all'interno di un nucleo stabile) di comportarsi come particelle radioattive e quindi di emettere β^- o β^+ rispettivamente, secondo i seguenti schemi



in cui ν e $\bar{\nu}$ sono il neutrino e la sua antiparticella, l'antineutrino. In effetti la 2.56') è giustificata dal fatto che la massa di un neutrone libero è maggiore di quella di un atomo di idrogeno ($p^+ + e^-$), per cui risulta disponibile per il decadimento di un neutrone l'energia

$$E_{\beta^-} = [m_n - (m_p + m_e)]c^2 = 939.553 \text{ MeV} - (938.259 + 0.511) \text{ MeV} = 0.782 \text{ MeV}$$

Questa energia viene spartita fra il protone, l'elettrone e il neutrino, cosicché i β^- emessi non possiedono tutti la stessa energia, ma presentano uno spettro energetico continuo da zero al valore massimo disponibile E_m , in questo caso 0.782 MeV .

La trasformazione di un neutrone in un protone e un elettrone, detta **decadimento β^-** , avviene anche in numerosi nuclei naturali e artificiali. Per esempio, il ^{211}Bi decade via β^- con uno spettro continuo, per quanto già detto, fino all'energia massima $E_m = 1.17 \text{ MeV}$ (Fig. 2.18).

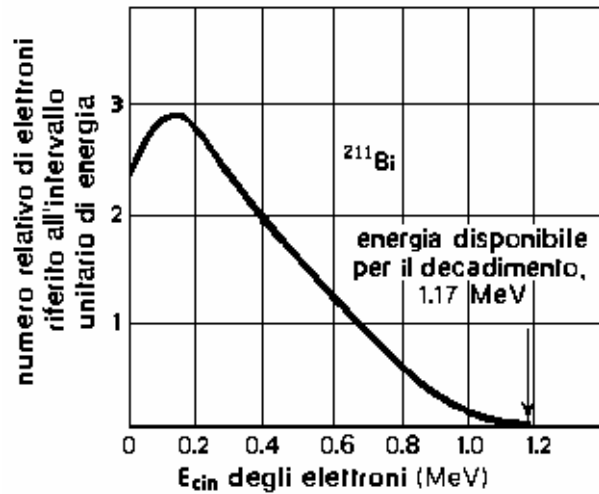


Fig. 2.18 - Spettro in energia dei β^- emessi dal ^{211}Bi . In ogni decadimento, la differenza di energia fra 1.17 MeV e l'energia del neutrone si trasforma in energia cinetica del neutrino.

Il decadimento β^- trasforma un nucleo (Z,A) in un nucleo $(Z+1,A)$ ed è energeticamente possibile solo se la massa del nucleo figlio $(Z+1,A)$ è minore della massa del progenitore (Z,A)

$$2.57) \quad m(Z,A) > m(Z+1,A)$$

Sotto tale ipotesi, l'energia di decadimento risulta essere

$$2.58) \quad E_{\beta^-} = [m(Z,A) - m(Z+1,A)]c^2$$

dove sono utilizzate ancora le masse atomiche, che comprendono ovviamente quelle degli elettroni.

Anche il nucleo di ^8Li ($3p+5n$) decade via β^- in ^8Be ($4p+4n$), con tempo di dimezzamento di 0.85 s, trasformando così un neutrone in protone. Lo ^{90}Sr ($T=28 a$) è un importante emettitore β^- usato in radioterapia e nella datazione di materiali archeologici e geologici. Esso decade con $E_m=0.54 \text{ MeV}$ in ^{90}Y ($T=64 o$), anch'esso emettitore β^- con $E_m=2.27 \text{ MeV}$. In tal modo una sorgente di stronzio risulta in equilibrio secolare col figlio ittrio e offre una combinazione di particelle β^- di energia massima 0.54 MeV e 2.27 MeV (**Fig. 2.19b**). Altre sorgenti d'importanza radiobiologica sono il ^{14}C ($T=5600 a$, $E_m= 0.156 \text{ MeV}$), il cui schema è riportato in **Fig. 2.19a**, e il ^{40}K ($T=1.3 \cdot 10^9 a$, $E_m=1.34 \text{ MeV}$). Le energie tipiche di questi decadimenti variano tra 0.01 e 3 MeV e l'energia cinetica media degli elettroni è circa 1/3 dell'energia massima. Spesso un decadimento β^- lascia il nucleo finale in uno stato eccitato, che per **emissione γ** passerà allo stato fondamentale.

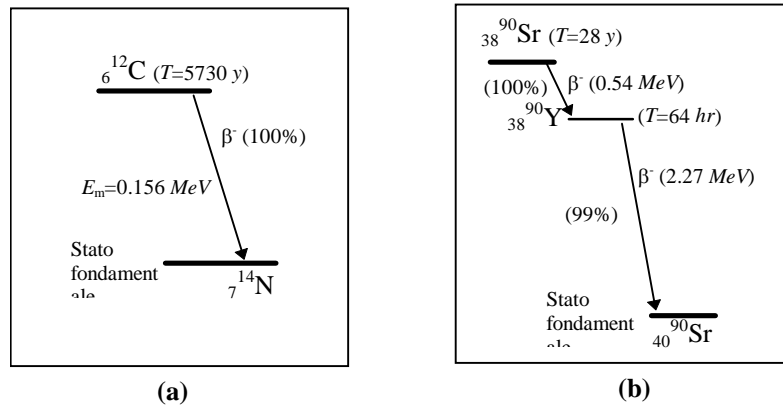


Fig. 2.19 - Schemi di decadimento di emettitori β^- : (a) ^{14}C e (b) ^{90}Sr .

Le particelle β^- e β^+ sono in grado di interagire con la materia in quanto **particelle cariche leggere**.

Un'emissione γ lascia invariati sia il numero atomico Z che il numero di massa A del nucleo interessato.

Spesso la diseccitazione γ avviene a seguito di decadimenti β^- , che portano ad un nucleo eccitato. Esempi di questo tipo si hanno in due sorgenti γ comunemente usate in radiobiologia, il ^{60}Co e il ^{137}Cs , i cui schemi di decadimento sono riportati in Fig. 2.21. Gli spettri in energia risultano discreti, per cui tali sorgenti sono normalmente utilizzate in spettroscopia γ per la taratura energetica delle apparecchiature.

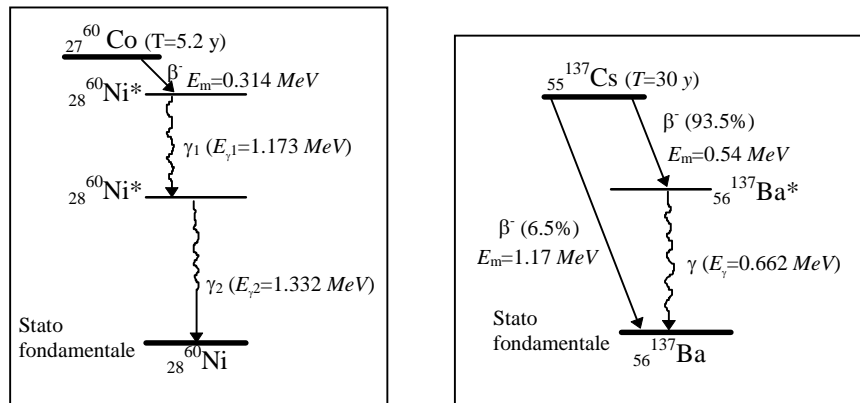


Fig. 2.21 - Schemi di decadimento di due sorgenti γ : (a) il ^{60}Co e (b) il ^{137}Cs .

I raggi γ , pur essendo **radiazione elettromagnetica** neutra, sono in grado di interagire con la materia.

Cap. 3 - La radioattività artificiale

3.1 - Produzione di elementi radioattivi	49
3.2 - Legge di accumulo di un prodotto radioattivo al variare del tempo di bombardamento	50
3.3 - Radionuclidi artificiali	52
3.4 - Elementi transuranici	53

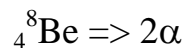
3.1 - Produzione di elementi radioattivi

La radioattività artificiale venne scoperta studiando le reazioni nucleari, mediante le quali vengono tuttora prodotti **radionuclidi artificiali**. Questi decadono spontaneamente seguendo le stesse leggi che governano la disintegrazione degli elementi radioattivi che si trovano in natura. Il termine di radioattività artificiale si riferisce quindi al modo con cui sono prodotti i nuovi radionuclidi, piuttosto che al loro decadimento.

Sia data la reazione

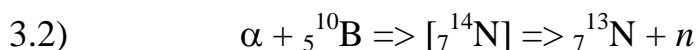


in cui C sia instabile. Questo nucleo prodotto C può decadere in un nucleo E attraverso un decadimento radioattivo, ma si parlerà di un processo radioattivo artificiale solo quando il nucleo C ha una sua vita media ben definita e caratteristica. Non si considera radioattività artificiale, ad esempio, la disintegrazione

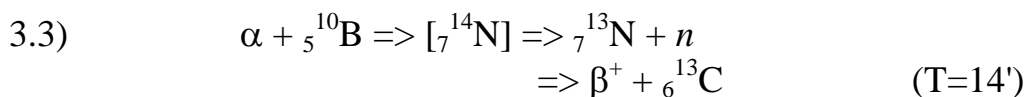


che non possiede una propria vita media τ , ma è un processo istantaneo. Anche nel caso di radioattività artificiale la diseccitazione avviene attraverso uno dei tre canali α , β o γ , come nei casi noti di radioattività naturale.

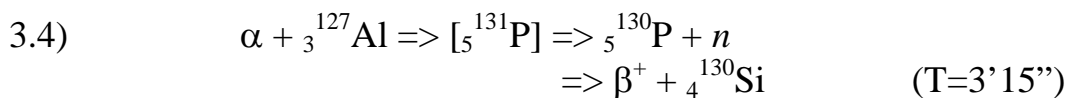
La radioattività artificiale fu scoperta nel 1934 dai coniugi Irene Curie e Frederic Joliot, che per tale motivo l'anno dopo vinsero il Nobel per la chimica. Essi osservarono che, in conseguenza al bombardamento α dei nuclei leggeri, si evidenziava una attività, come per esempio nel caso della reazione



Ora il ${}_7^{13}\text{N}$ è un nucleo instabile e decade nel ${}_6^{13}\text{C}$ mediante β^+ con un tempo di dimezzamento $T=14$ minuti, cosicché tutto il processo può scriversi



Un'altra reazione osservata, che dà luogo allo stesso fenomeno, fu



Lo schema secondo cui avvengono queste reazioni fu allora precisato anche mediante l'analisi chimica dei prodotti di reazione. Così, ad esempio, nella reazione 3.3), per riconoscere l'elemento radioattivo prodotto (${}_7^{13}\text{N}$) si aggiungeva idrogeno,

che con l'azoto forma ammoniacca (NH_3), la quale viene portata via, separando così l'azoto da tutto il resto. L'ammoniaca risulta radioattiva, assicurando in tal modo che è proprio l'azoto a decadere e non piuttosto il boro, che non partecipa alla reazione nucleare. Un analogo procedimento, applicato alla reazione 3.4), allontana il fosforo generato, combinandolo con l'idrogeno e producendo fosfina PH_3 .

Mediante reazione nucleare, oltre ad elementi radioattivi naturali si sono creati elementi artificiali, che decadono con disintegrazioni radioattive, tendendo a trasformarsi in piombo.

3.2 - Legge di accumulo di un prodotto radioattivo al variare del tempo di bombardamento

Si schematizzi la reazione, che forma il nucleo radioattivo B mediante bombardamento della particella a sul nucleo A , nella forma



La variazione nel tempo del nucleo B può essere scritta come

$$3.6) \quad \frac{dB}{dt} = A\lambda_A - B\lambda_B$$

Questa relazione mostra che la trasformazione di A in B in seguito alla reazione nucleare 3.5) fornisce un contributo positivo $A\lambda_A$ alla variazione di B nel tempo, mentre è negativo il contributo $B\lambda_B$ del decadimento radioattivo di B nel nucleo finale C , stabile. Quest'ultima trasformazione $B \rightarrow C$ avviene con costante di decadimento $\lambda_B = 1/\tau_B$. Per meglio precisare λ_A , si consideri che $A\lambda_A$ rappresenta, come già detto, il numero di nuclei A che si trasformano in B nell'unità di tempo. Questo numero sarà proporzionale al numero F_a di particelle a incidenti sul bersaglio A nell'unità di tempo. Se il bersaglio contiene A nuclei ed ha uno spessore s , detta σ la sezione d'urto (vedasi al Cap. 5 la 5.1 e seguenti) della reazione 3.5), si ha

$$3.7) \quad A \cdot F_a \cdot s \cdot \sigma = A \cdot \lambda_A$$

da cui

$$3.8) \quad \lambda_A = F_a \cdot s \cdot \sigma$$

Poiché il flusso F_a delle a incidenti è costante, anche λ_A risulta costante. D'altra parte di regola risulta verificato che

$$3.9) \quad \lambda_A \ll \lambda_B$$

e cioè che il numero di nuclei A , che si trasformano in B , è molto inferiore al numero di nuclei B che si trasformano in C nello stesso tempo. Tenendo conto che A varia nel tempo come

$$3.10) \quad A = A_0 e^{-\lambda_A t}$$

risulta che

$$3.11) \quad B(t) = \frac{A_0 \lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

avendo considerato che per $t=0$ si ha $B=0$ ed $A=A_0$.

Per $\lambda_A \ll \lambda_B$ si ottiene l'approssimazione

$$3.12) \quad \begin{aligned} A &= A_0 e^{-\lambda_A t} \approx A_0 \\ B(t) &\approx \frac{A_0 \lambda_A}{\lambda_B} (1 - e^{-\lambda_B t}) \end{aligned}$$

da cui l'attività di B , definita come $\lambda_B \cdot B$, risulta essere

$$3.13) \quad \text{Att. } B = \lambda_B B \approx A_0 \lambda_A (1 - e^{-\lambda_B t})$$

La curva dell'attività di B in funzione del tempo t è riportata in **Fig. 3.1**. Per $t \rightarrow \infty$ si ha $\text{Att. } B = \text{Att. } A = A_0 \lambda_A$. Praticamente, però, l'attività di B raggiunge il suo massimo già dopo un tempo pari a circa $2 \div 3$ volte il suo tempo di dimezzamento T_B dall'inizio di tutto il processo, avendosi nel seguito incrementi sempre più piccoli di tale attività.

Dalla **Fig. 3.1** si deduce che per avere l'optimum dell'attività di B (cioè della radioattività artificiale) non conviene superare un tempo di bombardamento di A pari a $t \sim (2 \div 3) T_B$, perchè dopo tale tempo l'attività di A è praticamente uguale all'attività massima di B .

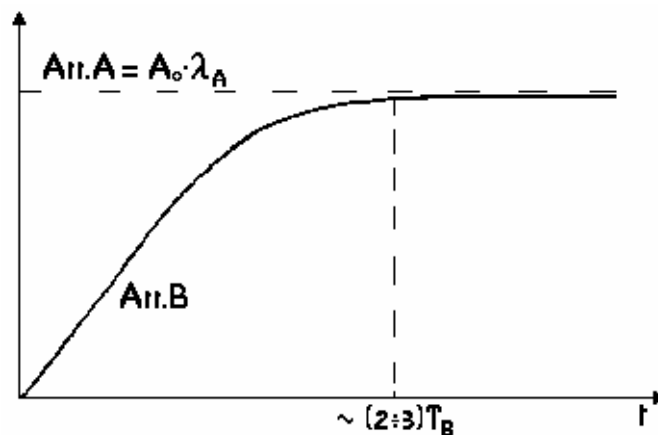


Fig. 3.1 -Andamento nel tempo dell'attività del nucleo B , prodotto nella reazione 3.5).

3.3 - Radionuclidi artificiali

Si supponga di avere costruito, mediante una reazione nucleare, un radioelemento artificiale. Questo, si è detto, può decadere via α , β^- , β^+ o γ .

In generale le condizioni energetiche determinano innanzitutto se il nucleo prodotto è stabile e, nel caso non lo sia, quale via di decadimento è favorita. Infatti la condizione che nel decadimento del radionuclide l'energia deve conservarsi esclude normalmente la possibilità di emissione di uno o più tipi di radiazione. Ciò risulta vero per decadimenti di elementi radioattivi sia artificiali che naturali, i quali seguono tutti i seguenti schemi di decadimento:

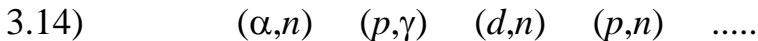
Decadimento	Nucleo iniziale	Nucleo finale
α	A, Z	A-4, Z-2
β^+	A, Z	A, Z-1
β^-	A, Z	A, Z+1
γ	A, Z	A, Z

Se si osserva la [curva di stabilità nucleare](#), questa risulta divisibile in tre zone. La zona **a** ($0 \leq Z \leq 82$) è la cosiddetta zona della radioattività artificiale. La zona **b** ($82 \leq Z \leq 92$) è la zona delle catene radioattive naturali, mentre la zona **c** ($Z > 92$) è quella degli elementi transuranici artificiali (vedasi Fig. 2.7 del Cap. 2).

Se il nucleo instabile prodotto cade al di sopra della curva di stabilità, è preferito il [decadimento \$\beta^-\$](#) . Se, viceversa, esso viene a trovarsi sotto la curva, è preferito il [decadimento \$\beta^+\$](#) (e non piuttosto il [decadimento \$\alpha\$](#) , che si nota solo nella zona **c** dei [transuranici](#)). Di fatto, se il nucleo instabile sta al di sopra della [curva di stabilità](#), esso tende ad aumentare la propria carica ($Z \rightarrow Z+1$) per riportarsi su di essa e trasformarsi così in nucleo stabile; viceversa, se si trova al di sotto, tende a perdere la carica ($Z \rightarrow Z-1$) per stabilizzarsi.

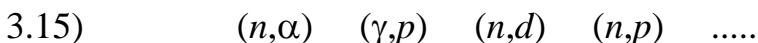
Il [decadimento \$\gamma\$](#) , invece, è privilegiato alle basse energie.

Esiste, poi, una certa correlazione fra il tipo di decadimento e il tipo di reazione con la quale è stato generato l'elemento radioattivo. Infatti le reazioni che aumentano la carica favoriscono il successivo decadimento β^+ , come avviene, per esempio, nelle



In effetti queste reazioni portano un nucleo iniziale stabile in un nucleo finale instabile, con carica maggiore del normale, cioè al di sotto della curva di stabilità. Da ciò un preferenziale decadimento β^+ .

Per le stesse ragioni, le reazioni inverse delle 3.14) sono in generale seguite da un decadimento β^- , come nelle



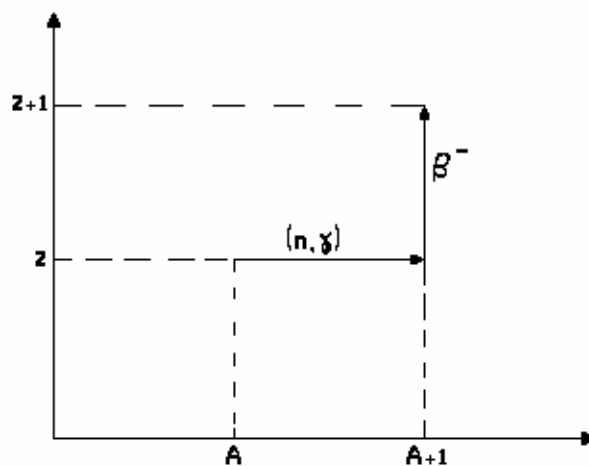


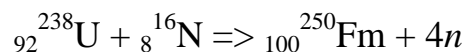
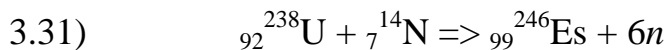
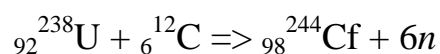
Fig. 3.2 - Schema di formazione della catena dei transuranici, che ha il plutonio come genitore.

Nella Tab. 3.1 sono riportati gli elementi transuranici fino ad ora scoperti (il loro numero va aumentando col passare degli anni).

Tab. 3.1-Elementi transuranici

Z	Simbolo	Nome
93	Np	Nettunio
94	Pu	Plutonio
95	Am	Americio
96	Cm	Curio
97	Bk	Berkelio
98	Cf	Californio
99	Es	Einstenio
100	Fm	Fermio
101	Md	Mendelevio
102	No	Nobelio
103	Lr	Lawrezio

Come già detto, in generale si usa il processo (n,γ) per ricavare gli elementi transuranici; tuttavia questi possono essere prodotti anche attraverso altri processi come, ad esempio, il bombardamento con ioni pesanti:



Prima di chiudere l'argomento dei transuranici, è utile ricordare che il nettunio Np dà luogo, con i successivi decadimenti, ad una catena radioattiva, con nucleo finale il ${}_{83}^{209}\text{Bi}$, nota come serie del nettunio. Molti componenti di questa catena sono emettitori α . Questa serie non compare fra quelle naturali perchè la vita media del Np, il componente a vita media più lunga di tutta la serie ($2.2 \cdot 10^6$ anni), è piccola rispetto all'età della catena ($5 \cdot 10^9$ anni).

Cap. 4 - Gli acceleratori di particelle

Introduzione	59
4.1 - Van de Graaff	60
4.2 - Acceleratori lineari o Linac	61
4.3 - Ciclotrone	62
4.4 - Betatrone	63
4.5 - Sincrotrone	64
4.6 - Anelli di accumulazione	65

Introduzione

Gli acceleratori sono macchine che permettono di imprimere alle particelle cariche energie cinetiche elevate allo scopo di produrre con esse reazioni nucleari. Per la stessa funzione sono stati usati e si usano tuttora anche i raggi cosmici. In Tab. 4.1 è riportato un confronto fra i due diversi metodi. Da questa risulta che, se i raggi cosmici sono stati e sono tuttora utilissimi, solo con le macchine si possono effettuare studi precisi.

Tab. 4.1-Confronto fra acceleratori e raggi cosmici.

	ACCELERATORI	RAGGI COSMICI
ENERGIA	ben definita	qualsiasi
INTENSITA'	a piacere	debolissima
DIREZIONE	fissa	qualsiasi

L'evoluzione delle macchine può essere sintetizzata nel seguente modo:

1928÷1930: acceleratori elettrostatici per protoni e ioni fino a ~ 300 keV (per esempio $p + {}^7\text{Li} \rightarrow \alpha + \alpha$);

1930÷1945: ciclotrone (Lawrence lab.) per protoni e ioni fino a qualche MeV;

1945÷1946: stabilità di fase (Veksler e McMillan) per portare i protoni fino a 7 GeV;

1950 : focalizzazione forte, che segna il definitivo decollo degli acceleratori e porta l'energia fino a ~ 1 TeV. Queste macchine si dividono in due categorie: lineari e circolari, ma oggi sta nascendo una macchina mista per elettroni. Vedremo a grandi linee i principali tipi di macchine.

Le sorgenti delle particelle da accelerare sono in generale costituite, almeno per gli elettroni, da un filamento scaldato, che emette per effetto termoionico. Per protoni o ioni la produzione è più complicata. In genere si usa ancora un filamento scaldato, che emette elettroni su un gas di idrogeno ionizzandolo, e da esso gli ioni positivi sono estratti mediante un potenziale negativo $-V$ (Fig. 4.1). In tal modo si ottengono correnti dell'ordine di alcuni mA.

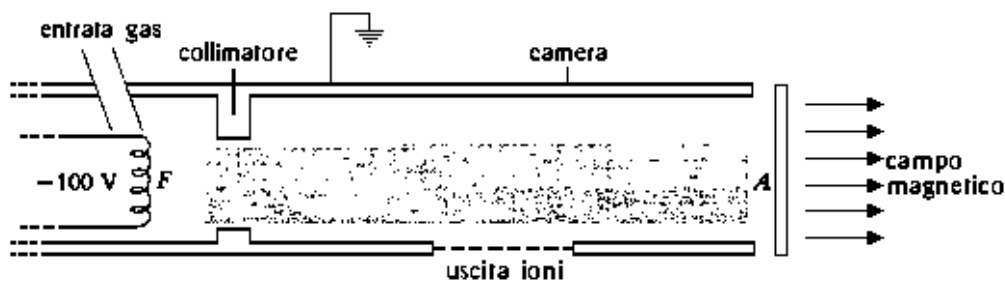


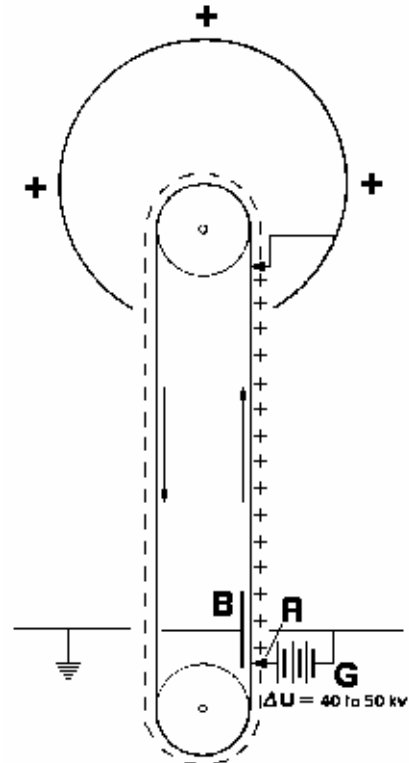
Fig. 4.1 - Tipica sorgente di ioni positivi. Gli elettroni, emessi da un filamento F a circa -100 V, oscillano tra questo e l'anodo A , avvolgendosi a spirale attorno alle linee di forza del campo magnetico e formano ioni positivi per urto nel gas. Si crea così il plasma, costituito da elettroni e ioni positivi, che vengono estratti dal plasma attraverso l'apertura.

4.1 - Van de Graaff

E' forse il più antico acceleratore ed è ancora in uso. E' basato su un principio elementare: basta applicare una differenza di potenziale ai due estremi di un tubo vuoto lungo alcuni metri. La focalizzazione delle particelle è ottenuta con elettrodi forati. Il problema è quello di generare tensioni di alcuni milioni di volt. Seguendo lo schema in figura, mediante il generatore *G* si stabilisce una differenza di potenziale tra *A* e *B* di alcuni *kV*. La punta *A* perde cariche (positive nel disegno), che, muovendosi da *A* verso *B*, sono raccolte dalla cinghia trasportatrice isolante, che si carica.

All'interno della sfera un'altra punta si carica negativamente per induzione, mentre la sfera si carica positivamente. Le cariche indotte sfuggono dalla punta e neutralizzano la cinghia, che esce scarica dalla sfera cava. In tale modo si riescono a produrre differenze di potenziale di circa 20 *MV*, ma con dimensioni di vari metri. All'interno della sfera (Fig. 4.2) è contenuta la sorgente e gli ioni si muovono lungo un tubo ad alto vuoto, connesso alla sorgente sempre entro la sfera cava. La parte terminale del tubo contiene il bersaglio ed è a

potenziale zero. Tutto il sistema è contenuto in un recipiente con gas (azoto) a pressione per evitare scariche.



Si possono accelerare protoni, ioni leggeri ed elettroni. L'energia è definita a ~0.1% e l'intensità è di ~100 *mA*.

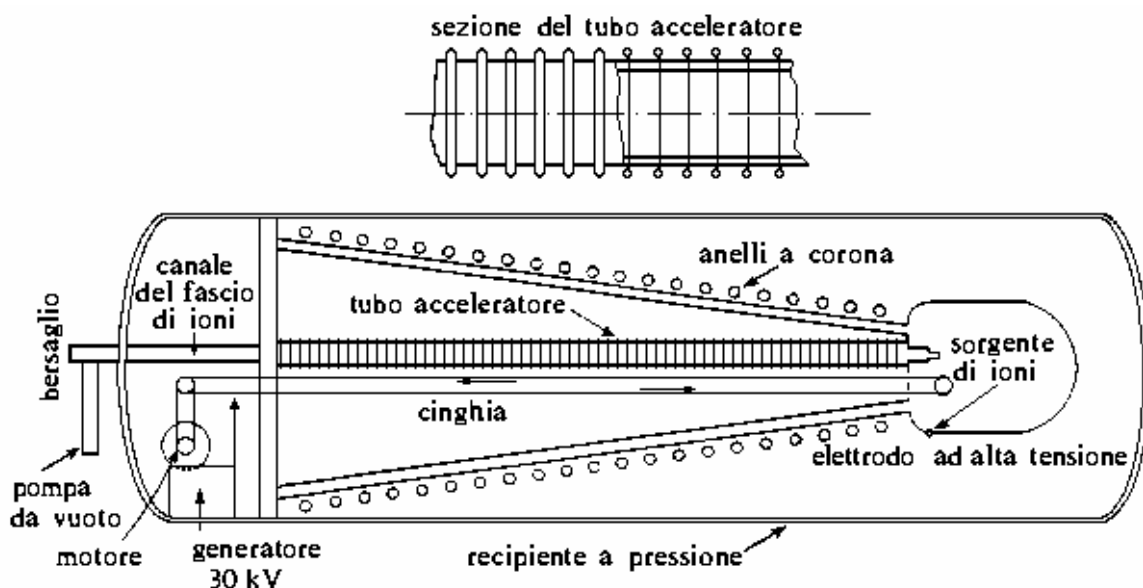
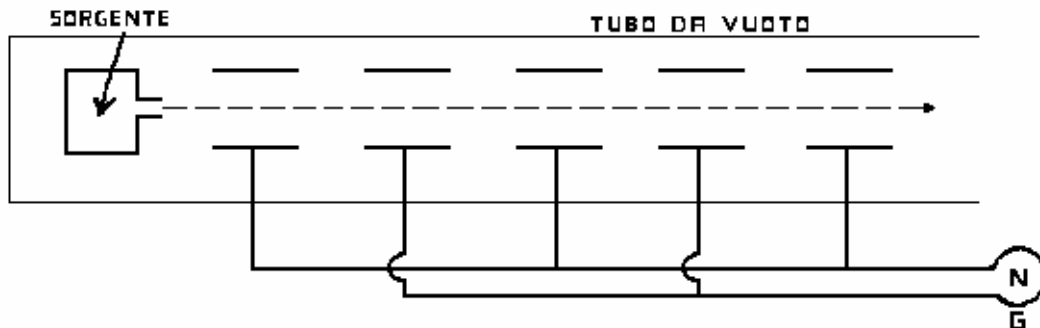


Fig. 4.2 - Schema di un generatore Van de Graaff per accelerare ioni positivi.

4.2 - Acceleratori lineari o Linac

L'idea basilare dei moderni acceleratori è di fornire energia alle particelle non in una sola volta, come nel Van de Graaff, ma in una successione di impulsi, sfruttando differenze di potenziale impulsate relativamente piccole. Lo schema di principio di un acceleratore lineare è il seguente:



Esso è costituito da cilindri cavi (Fig. 4.3), collegati alternativamente ai poli opposti di un oscillatore, posti all'interno di un tubo ad alto vuoto. In ogni intervallo fra un cilindro e il successivo si stabilisce una differenza di potenziale $V=V_0\cos\Omega t$. Le particelle che viaggiano lungo il tubo si muovono con moto uniforme all'interno dei cilindri e quando entrano nel cilindro successivo ricevono un impulso.



Fig. 4.3 - Acceleratore lineare. Il terzo segmento acceleratore ha una lunghezza $L_3 = \sqrt{\frac{3 \cdot 2eV_0}{m}} \frac{T}{2}$.

Se la lunghezza dei cilindri è opportuna (Fig. 4.3), le particelle passano da un cilindro al successivo quando il campo è in fase e vengono accelerate. Supponendo, quindi, che le particelle siano positive, la distanza L fra due intercapedini deve essere tale che esse entrino nel cilindro quando la tensione è negativa e ne escano quando la tensione è positiva. Se v è la velocità e T il periodo, deve essere

$$4.1) \quad L = \frac{vT}{2}$$

Se $v \ll c$, dopo aver attraversato n intercapedini una particella avrà velocità

$$4.2) \quad v = \sqrt{\frac{n \cdot 2eV_0}{m}}$$

con l'approssimazione che $V = V_0$ nel tempo impiegato dalla particella per passare da un cilindro all'altro. Allora

$$4.3) \quad L_n = \sqrt{\frac{n \cdot 2eV_0}{m} \frac{T}{2}}$$

Evidentemente per elettroni relativistici $v \sim c$, L è costante e vale $cT/2$.

La caratteristica dei Linac è un'elevatissima intensità, ma anche un basso ciclo utile (*duty-cycle*=rapporto fra il tempo in cui è presente il fascio e il tempo totale), vale a dire che il fascio uscente è concentrato in pacchetti di brevissima durata. Questo rappresenta un inconveniente dal punto di vista dell'utilizzatore.

L'utilizzo dei Linac è principalmente indirizzato agli elettroni: essendo la traiettoria rettilinea, la perdita di energia per irraggiamento è ridotta al minimo. Sono comunemente usati per produrre fasci di 300÷400 MeV di energia. Il più grande acceleratore lineare è stato costruito a Stanford ed è lungo 2 miglia ed accelera elettroni fino a 40 GeV.

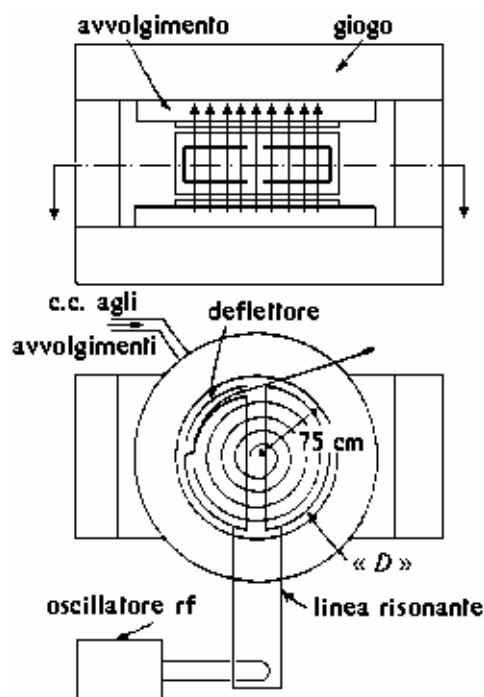
4.3 - **Ciclotrone**

E' la prima macchina in cui le particelle sono tenute su una traiettoria curvilinea a spirale da un campo magnetico in modo da passare più volte attraverso la differenza di potenziale che lo accelera. Gli elettrodi cavi a forma di D sono contenuti in un recipiente in cui viene fatto il vuoto. Al centro è posta la sorgente di ioni. Agli elettrodi è applicata una differenza di potenziale di qualche decina di kV ad alta frequenza. Gli ioni, sotto l'influenza del campo elettrico, cominciano a muoversi verso una D , all'interno della quale il campo è nullo. Gli ioni, quindi, percorrono una semicirconferenza, uscendo dal punto diametralmente opposto rispetto all'entrata. Nel momento in cui passano da una D all'altra il campo fra i due elettrodi ha mutato segno in modo da imprimere loro una accelerazione e, sotto l'influenza del campo magnetico, descrivono nella D successiva una traiettoria circolare di raggio leggermente maggiore.

Questo procedimento viene ripetuto alcune migliaia di volte e ad ogni mezzo giro gli ioni subiscono un'accelerazione, per cui il raggio della traiettoria aumenta fino ad essere quasi uguale a quello della D . A questo punto un elettrodo estrattore li deflette, portandoli fuori dalla D , per cui possono essere diretti su un bersaglio.

L'energia massima ottenibile è di 20-30 MeV per protoni.

Queste macchine, che sono stati i primi acceleratori circolari, non differiscono concettualmente da un acceleratore lineare quale descritto precedentemente se non per il fatto che la traiettoria descritta dalla particella è tale da farla passare più volte attraverso lo stesso campo acceleratore. Sono macchine continue, nel senso che il fascio non ha una struttura temporale, e possono raggiungere elevate intensità, dell'ordine di molti mA .



Vediamo quantitativamente il procedimento. Affinché la macchina funzioni, occorre sincronizzare l'alternanza del campo elettrico fra le D con il moto delle particelle. Se ci si limita al solo caso non relativistico (che è il solo modo di funzionamento di un ciclotrone, come si vedrà), il

raggio di curvatura delle varie circonferenze percorse dalle particelle è legato a v , m , q ed H dalla relazione

$$4.4) \quad R = \frac{mv}{qH}$$

dove la carica q è intesa in modulo. La velocità angolare sarà quindi

$$4.5) \quad \Omega = \frac{v}{R} = \frac{qH}{m}$$

che non dipende da v . R è il raggio di curvatura della traiettoria. Applicando un campo elettrico alternato di frequenza costante pari a

$$4.6) \quad f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{qH}{2\pi m}$$

si assicura il sincronismo con il moto delle particelle.

L'energia cinetica E è data da

$$4.7) \quad E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(qRH)^2}{2m}$$

ed è tanto più elevata quanto più intenso ed esteso è il campo magnetico. In pratica il limite è imposto dalla saturazione del ferro e da considerazioni di carattere economico. Per raggi R dell'ordine di 60-80 cm il magnete pesa parecchie tonnellate!

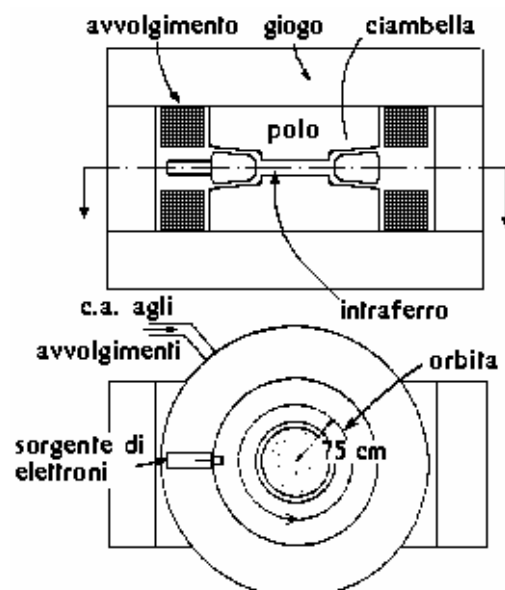
4.4 - Betatrone

Questa macchina è costituita da un magnete con i poli sagomati opportunamente, alimentato in corrente alternata ad una frequenza fra 50 e 200 Hz. La camera da vuoto, che è un tubo toroidale detto "ciambella", è sistemata nel traferro del magnete.

Il campo magnetico ha una doppia funzione:

1. il flusso magnetico concatenato con la ciambella cambia nel tempo e induce un campo elettrico, le cui linee di forza sono circonferenze concentriche ortogonali all'asse di simmetria. Una di queste circonferenze è l'orbita centrale della ciambella. Questo campo elettrico accelera le particelle.
2. il campo magnetico presente nella camera da vuoto esercita sulla particella una forza

di Lorentz, diretta verso il centro, tale da mantenerla su un'orbita circolare.



Concettualmente è simile ad un trasformatore in cui la corrente primaria è quella che eccita il magnete e la secondaria è costituita dalle particelle, che circolano nella camera da vuoto.

Affinché il campo magnetico, variando nel tempo, possa effettivamente svolgere le due funzioni sopra specificate, deve esistere una relazione fra il campo medio $\langle H \rangle$ racchiuso dall'orbita e il campo H sull'orbita stessa.

Se si suppone che a $t=0$ sia $H_0 = \langle H_0 \rangle = 0$, risulta che il valore del campo sull'orbita deve essere

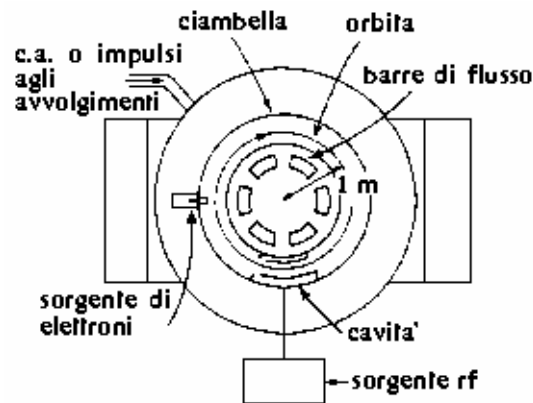
$$4.16) \quad H_0 = \frac{1}{2} \langle H \rangle$$

Questa è la condizione per il funzionamento del betatrone, che impone una particolare sagomatura per i poli del magnete (Fig. 4.5b) in modo che sia osservata la 4.16).

4.5 - **Sincrotrone**

Il sincrotrone è l'acceleratore moderno, in grado di accelerare sia ioni che elettroni e in certo modo combina le idee del ciclotrone e del betatrone. Infatti le particelle sono mantenute su un'orbita circolare in una ciambella vuota. Il campo acceleratore è ottenuto con una cavità risonante inserita nella ciambella.

Occorre evidentemente che il periodo T della radiofrequenza nella cavità si uguale o sottomultiplo del tempo impiegato da una particella a percorrere l'orbita circolare. Questo tempo, tuttavia, diminuisce e dunque occorrerà una modulazione di frequenza. Inoltre, per mantenere le particelle su un'orbita fissa, il campo magnetico dovrà crescere con la loro energia.



La condizione di funzionamento si ricava da quanto detto per il ciclotrone, tenendo però conto del fatto che ora le particelle sono relativistiche. Di conseguenza nella 4.5) m sarà sostituita da $m_0\gamma$, con m_0 massa in quiete. Se si scrive che $\beta=\Omega R$, lo si sostituisce in γ e quindi nella 4.5), si ottiene

$$4.18) \quad \Omega = \frac{\frac{qH}{m_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{qHR}{m_0}\right)^2}}$$

che mostra come devono variare contemporaneamente H e Ω .

Anche il sincrotrone è una macchina pulsata e le particelle si raggruppano naturalmente intorno alla particella sincrona.

Il limite di energia è imposto sempre dal costo. Infatti l'impulso finale è dato da qHR e, se R è molto grande, la spesa diventa proibitiva.

Nella teoria degli acceleratori si dimostra che, affinché l'orbita di una particella sia stabile, l'intensità del campo magnetico deve dipendere dal raggio R con una legge del tipo

$$4.19) \quad H(R) = \frac{H_0}{R^n}$$

in cui n , **indice di campo**, deve essere $0 < n < 1$.

Sono in funzione oggi sincrotroni da circa 1000 GeV, il cui costo relativamente ridotto è dell'ordine delle migliaia di miliardi.

4.6 - Anelli di accumulazione

La costruzione di una macchina da 1000 TeV è un'impresa decisamente impossibile, sia per costi che per dimensioni. Se però si tiene conto che la grandezza significativa nello studio delle interazioni fra particelle è l'energia totale nel centro di massa, nasce l'idea di utilizzare i sincrotroni esistenti in modo nuovo: facendo circolare dentro lo stesso anello contemporaneamente particelle e antiparticelle (e^+e^- , $p\bar{p}$, ecc.) e facendole collidere, si ottiene un aumento dell'energia, che nel caso relativistico estremo risulta esattamente pari a un fattore due. In tal modo due fasci incrociati di protoni ciascuno di 15 GeV sono equivalenti ad un fascio di 500 GeV su un bersaglio fermo.

Sostanzialmente si inietta il fascio mediante un **Linac** in un anello di accumulazione, dove si riesce ad aumentare l'intensità iniziale fino ad alcune centinaia di mA per gli elettroni o qualche A per protoni e al momento voluto si produce la collisione sul bersaglio. La macchina ADONE (maggiorativo di ADA=Anello Di Accumulazione) dei Laboratori Nazionali di Frascati dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare è stata costruita e utilizzata a questo scopo (Fig. 4.6).



Fig. 4.6 - ADONE, anello di accumulazione e^+e^- , dei Laboratori Nazionali di Frascati dell'INFN

Cap. 5 - Interazioni della radiazione con la materia

<i>5.1 - Definizioni e unità di misura</i>	69
<i>5.2 - Le sorgenti di radiazione</i>	72
<i>5.3 - Le particelle cariche pesanti</i>	77
<i>5.4 - Le particelle cariche leggere</i>	81
<i>5.5 - La radiazione elettromagnetica</i>	84
APPENDICE - L'effetto Compton.....	88

5.1 - Definizioni e unità di misura

Consideriamo il seguente esperimento, schematizzato in Fig. 5.1. Sia n_0 il numero di particelle monoenergetiche incidenti nell'unità di tempo sull'unità di superficie di una sottile lamina, n il numero di quelle catturate e (n_0-n) il numero di quelle uscenti. L'unità di misura di tutte queste grandezze appena definite è $[L^{-2} T^{-1}]$.

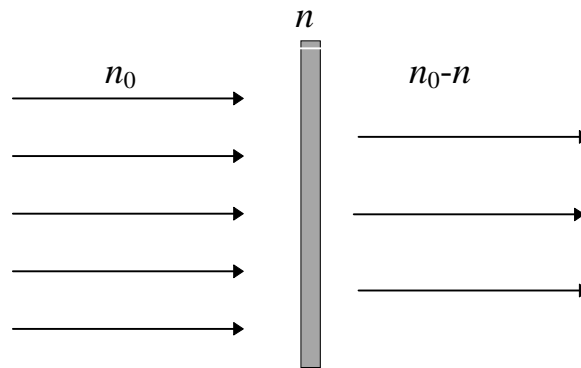


Fig. 5.1 - Assorbimento: n_0 sono le particelle incidenti, n quelle assorbite, n_0-n quelle emergenti.

Poiché i processi di cattura da parte di un atomo sono indipendenti e del tutto casuali ed n sarà tanto maggiore quanto più elevato sarà il numero N di atomi per unità di superficie dell'assorbitore, possiamo dire che

$$5.1) \quad n = \sigma n_0 N \quad [\sigma] = [L^{-2}]$$

Proprio il coefficiente di proporzionalità σ è chiamato sezione d'urto nucleare o microscopica di cattura (ha le dimensioni di una superficie) e intuitivamente rappresenta la sezione dell'area efficace di un nucleo vista dalla particella incidente. La sua unità di misura è il *barn* ($= 10^{-28} m^2$). Essa può essere considerata la somma delle sezioni d'urto dei diversi processi, quali l'emissione di neutroni (σ_n), di protoni (σ_p), di alfa (σ_α), ecc. Di conseguenza la relazione

$$5.2) \quad \sigma = \sigma_n + \sigma_p + \sigma_\alpha + \dots$$

rappresenta la probabilità totale che la particella subisca una qualsiasi delle interazioni considerate nella 5.2) e venga quindi fermata nell'assorbitore.

Se non si verificano le condizioni di estrema sottigliezza del bersaglio, si usa utilizzare la sezione d'urto macroscopica

$$5.3) \quad \Sigma = \sigma \cdot N \quad [N] = [L^{-3}]$$

dove N è il numero di nuclei per unità di volume del bersaglio. Σ ha come dimensioni $[L^{-1}]$. Tra Σ e σ esiste la relazione:

$$\Sigma = \sigma \cdot N = \sigma \cdot \text{atomi/cm}^3 = \sigma \cdot (\text{atomi/g}) \cdot (\text{g/cm}^3)$$

Poiché

$$\text{atomi/grammi} = N_A/A$$

dove $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ è il numero di Avogadro ed A è il numero di massa espresso in grammi, si ottiene

$$5.4) \quad \Sigma = \sigma \cdot \rho \cdot N_A/A$$

in cui ρ è la densità del materiale in g/cm^3 .

Assorbimento dei fotoni

Anche per i fotoni si definisce una quantità simile alla 5.3); è il coefficiente di **attenuazione lineare** μ dovuto a tutti i processi di assorbimento:

$$5.5) \quad \mu = \sigma \cdot N$$

dove N è ancora espresso in $[L^{-3}]$, σ in $[L^2]$ e di conseguenza μ risulta essere l'inverso di una lunghezza $[L^{-1}]$. Questa grandezza ha per i fotoni lo stesso significato che Σ ha per le particelle (per esempio per i neutroni) e rappresenta la probabilità per unità di percorso che abbia luogo una qualsiasi interazione (**fotoelettrica**, **Compton**, **creazione di coppie**). L'inverso del coefficiente di attenuazione lineare μ è una lunghezza e viene chiamato cammino libero medio della particella nel materiale:

$$5.6) \quad \text{c.l.m.} = 1/\mu$$

Esso rappresenta il percorso medio fra due successive interazioni.

Quando un fascio monocromatico (formato cioè da particelle della stessa energia) di intensità $I_0 [L^{-2} T^{-1}]$ incide perpendicolarmente su un assorbitore, un certo numero di particelle scompare dal fascio primario a causa delle interazioni subite (**Fig. 5.2**).

Ad una profondità x l'intensità iniziale I_0 si riduce ad I e nel successivo spessore dx si riduce ulteriormente della quantità $-dI$ data da:

$$5.7) \quad -dI = I \sigma N dx = I \mu dx$$

dove $\mu \cdot dx$ esprime la probabilità di un processo di attenuazione entro la distanza dx .
Dalla 5.7) si ottiene

$$5.8) \quad -\frac{dI}{I} = \mu \cdot dx$$

che, integrata, conduce alla

$$5.9) \quad I = I_0 e^{-\mu x}$$

Questa equazione è valida separatamente per ciascun processo d'attenuazione e fornisce il numero di particelle che attraversano lo spessore x senza subire alcuna interazione.

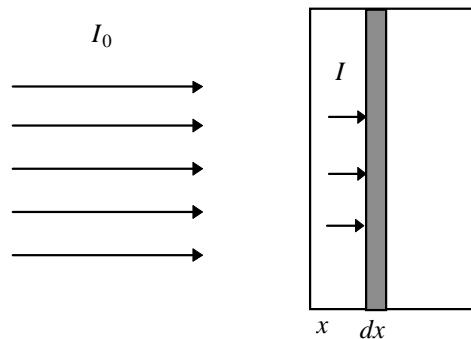


Fig. 5.2 - Schema del processo di assorbimento di un fascio di intensità iniziale I_0 ad una profondità x .

Spesso in Fisica Nucleare si usa misurare lo spessore t degli assorbitori in g/cm^2 ; questo si ottiene facilmente moltiplicando x in cm per la densità ρ in g/cm^3 del materiale:

$$5.10) \quad t = \rho \cdot x$$

Altra grandezza in uso oltre al coefficiente di attenuazione lineare 5.5) è il coefficiente di attenuazione massico, ricavabile come rapporto fra il primo e la densità ρ del materiale:

$$5.11) \quad \mu' = \mu/\rho$$

e risulta, quindi, essere espresso in unità $[L^2M^{-1}]$. Esso ha il vantaggio di essere indipendente dallo stato fisico dell'assorbitore (che può essere solido, liquido o gassoso) e dalla sua densità istantanea così come lo spessore t dato dalla 5.10).

Ricordiamo inoltre che:

$$Att.spec. = \frac{Att}{massa} = \frac{\lambda N}{NM} = \frac{\lambda N_A}{M}$$

dove: M è il peso molecolare del campione;
 N_A è il numero di Avogadro già definito;
 λ è la costante di decadimento del radioisotopo ($=\ln 2/T$).
L'unità di misura dell'attività è il *becquerel Bq* e

$$1 Bq = 2.703 \cdot 10^{-11} Ci$$

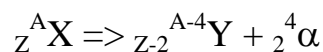
5.2 - Le sorgenti di radiazione

Vediamo rapidamente quali sono le sorgenti di radiazione e quante fra esse possono essere utilizzate in un laboratorio per la calibrazione in energia di un sistema di rivelazione.

A - Sorgenti di particelle cariche pesanti.

A1 - Decadimento α

il processo è schematizzato come



dove X e Y sono rispettivamente i nuclei iniziale e finale e α è la particella emessa: un nucleo di ${}^4\text{He}$. Il decadimento è energeticamente possibile nei nuclei pesanti instabili e lo spettro energetico è formato da uno o più picchi, corrispondenti alle possibili transizioni tra lo stato fondamentale del nucleo iniziale e lo stato fondamentale di uno dei nuclei finali. Infatti ogni transizione è caratterizzata dal suo Q -valore, che viene distribuito tra la particella α e il nucleo di rinculo, cosicché ogni α viene emessa con l'energia $Q(A-4)/A$. Solitamente la vita media di queste sorgenti è limitata ad alcuni giorni, almeno al di sopra dei 4 MeV ; inoltre le α sono soggette all'autoassorbimento.

A2 - Fissione spontanea:

è l'unico processo, che consente di ottenere particelle cariche pesanti con massa superiore a quella delle α . Si presenta negli elementi transuranici, spesso in concomitanza con l'emissione β . I due frammenti di fissione sono emessi in

direzioni opposte ed uno solo riesce ad emergere dal sottile strato depositato sul supporto, che assorbe l'altro frammento. Poiché i frammenti sono normalmente divisi in un gruppo più leggero e in uno più pesante, quelli leggeri si presentano ad un'energia più alta di quelli pesanti. L'autoassorbimento e le perdite di energia nella stessa sorgente sono considerevoli.

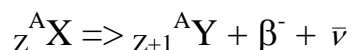
A3 - *Acceleratori*:

possono essere **Van de Graaff** o **ciclotroni**, tutte apparecchiature da laboratorio di ricerca.

B-Sorgenti di elettroni.

B1 - *Decadimento beta*:

il processo è schematizzato come



dove X e Y sono rispettivamente i nuclei iniziale e finale e $\bar{\nu}$ è l'antineutrino. I nuclei iniziali X sono prodotti per **attivazione** nei reattori nucleari. L'energia del β^- presenta uno spettro continuo da zero all'energia massima.

B2 - *Conversione interna*:

E' conseguenza della diseccitazione di un nucleo, in alternativa all'emissione γ . Se quest'ultima è vietata, l'energia di eccitazione del nucleo E può essere trasferita direttamente a un elettrone orbitale, che si presenta, quindi, con un'energia

$$E_{e^-} = E - E_b$$

dove E_b è l'energia di legame dell'elettrone. Lo spettro energetico si presenta con uno o più picchi discreti (a volte sovrapposti a un continuo) perchè gli elettroni provengono da *shell* distinte, ciascuna con la propria energia. Rappresentano, comunque, le uniche possibili sorgenti monocromatiche da laboratorio di energia abbastanza elevata.

B3 - *Elettroni Auger*:

si originano da una diseccitazione dell'atomo, in alternativa a un'emissione di raggi X. L'energia di eccitazione dell'atomo viene trasferita a un elettrone, che viene emesso con energia pari alla differenza fra l'energia di eccitazione e quella di legame. Lo spettro energetico è discreto come nella conversione interna, ma le energie in gioco sono più piccole. L'effetto è favorito nei materiali a basso Z , nei quali l'energia di legame è più bassa e per questo motivo gli elettroni Auger sono facilmente soggetti all'autoassorbimento.

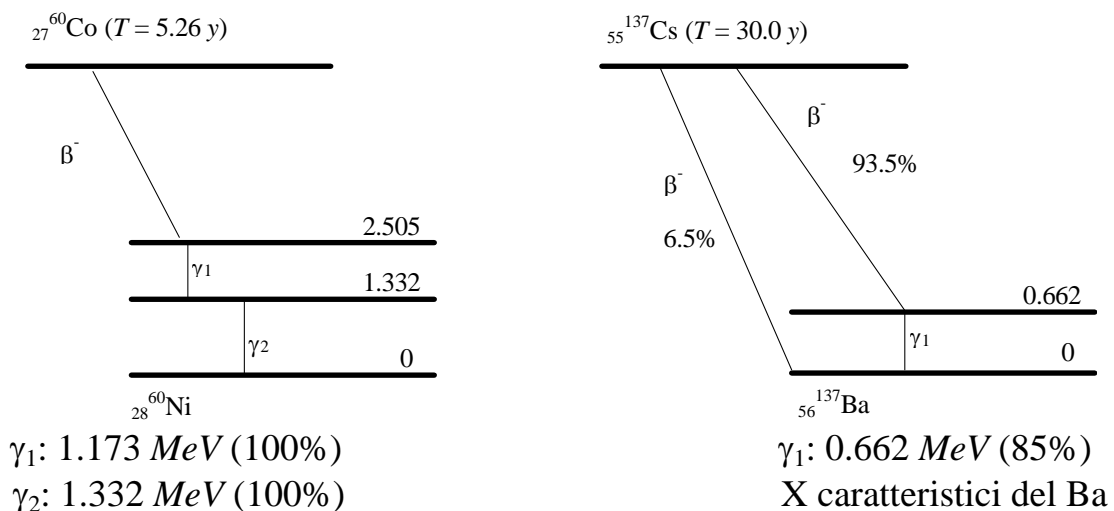
B4 - *Acceleratori di elettroni:*

sono prodotti dal riscaldamento di un filamento e accelerati in stadi successivi di differenze di potenziale in un Linac. Possono arrivare fino a vari *MeV* di energia, ma rappresentano una sorgente utilizzabile solo in grandi laboratori di ricerca.

C - **Sorgenti di radiazione elettromagnetica.**

C1 - *Gamma provenienti da decadimento β :*

come si vede negli schemi successivi, relativi al ^{60}Co e al ^{137}Cs , molti decadimenti β portano un nucleo ad un livello eccitato, da cui decade allo stato fondamentale in tempi brevissimi (1 ns o meno) emettendo un γ . Poichè i due stati possiedono un'energia ben definita, lo spettro energetico presenta un riga in corrispondenza con la transizione (sarà la risoluzione propria del rivelatore a presentarla allargata). Le energie non superano i 2.8 *MeV*. L'attività assoluta di queste sorgenti deve essere perfettamente nota per garantire misure accurate di attività specifica dei radioisotopi contenuti nei campioni.

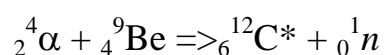


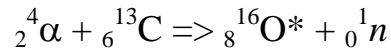
C2 - *Radiazione di annichilazione:*

si ottiene quando un positrone a fine percorso si combina con un elettrone dell'assorbitore, dando luogo a due γ di 0.511 *MeV* in due direzioni opposte. Si accompagna di norma a un decadimento β^+ .

C3 - *Gamma provenienti da reazioni nucleari:*

ogniqualevolta una reazione nucleare genera un nucleo in uno stato eccitato, questo decade allo stato fondamentale emettendo un fotone con un'energia determinata. Per ottenere una sorgente γ di questo tipo è necessario mescolare un emettitore a con un opportuno nucleo bersaglio, come per esempio ^9Be o ^{13}C , che danno luogo alle reazioni seguenti:





C4 - *Bremsstrahlung*:

si ha ogni volta che elettroni di alta energia subiscono accelerazioni, per esempio urtando su un assorbitore pesante. Lo spettro energetico è continuo da zero all'energia massima degli elettroni, con predominanza dei γ di bassa energia. Con particolari assorbitori è possibile filtrare il fascio di *bremsstrahlung* e piccarlo attorno a una determinata energia. Ogni sorgente β , incapsulata in un opportuno assorbitore, può diventare una sorgente di *bremsstrahlung*.

C5 - *Raggi X*:

quando un elettrone atomico viene spostato dal suo livello e portato in uno stato eccitato, tende a ritornare al livello di più bassa energia in tempi brevissimi, 1 ns o meno. L'energia viene emessa sotto forma di un X ed ha un valore ben definito, determinato dalla differenza di energia tra i due stati. Per ottenere una sorgente X si può eccitare l'atomo o mediante decadimento radioattivo o con una radiazione esterna.

D-Sorgenti di neutroni.

D1 - *Fissione spontanea*:

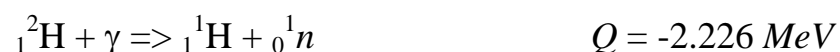
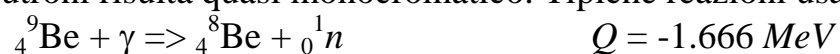
avviene in vari elementi transuranici, che oltre a produrre particelle cariche pesanti generano anche neutroni veloci. Lo spettro in energia è un tipico esponenziale dato da $dN/dE = E^{1/2}e^{-E/T}$, dove T è una costante caratteristica di ciascun elemento.

D2 - *Radioisotopi (a,n)*:

mischiando un emettitore α con un materiale adatto si produce una reazione che libera neutroni. I nuclei bersaglio sono solitamente il ${}^9\text{Be}$ o il ${}^{239}\text{Pu}/{}^9\text{Be}$. Lo spettro energetico è un continuo, su cui sono sovrapposti picchi corrispondenti a diversi stati eccitati del nucleo finale. Sorgenti di questo tipo devono essere tenute sigillate e usate con attenzioni particolari.

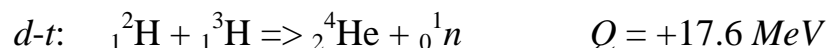
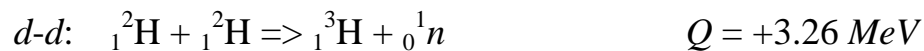
D3 - *Fotoneutroni*:

alcuni emettitori γ , mischiati ad opportuni nuclei bersaglio, quali ${}^9\text{Be}$ o ${}^2\text{H}$, sono in grado di produrre neutroni: se i γ sono monocromatici, anche lo spettro energetico dei neutroni risulta quasi monocromatico. Tipiche reazioni usate:



D4 - Reazioni da *particelle cariche accelerate*:

alcune reazioni, come la deuterio-deuterio e la deuterio-trizio, sono in grado di produrre neutroni, se gli ioni del deuterio sono accelerati da una differenza di potenziale di qualche centinaio di *kV* e fatti incidere sui nuclei bersaglio. Non sono utilizzabili in un laboratorio comune.



Il funzionamento di un *rivelatore di particelle* è basato sul fatto che una particella, nell'attraversare un materiale, perde tutta o parte della sua energia, consentendo così di misurarne le caratteristiche quali la massa, la velocità, l'energia, ecc. Le *interazioni* fra le particelle (o la radiazione) e il materiale sono principalmente di natura elettromagnetica, ad esclusione dei neutroni. L'importanza relativa dei singoli processi di interazione dipende dalla distanza di avvicinamento *b* della particella al nucleo atomico, oltre che dalla sua stessa energia. La distanza *b* è detta *parametro d'urto* (Fig. 5.3) ed è la minima distanza dal nucleo di carica *Ze* a cui può arrivare una particella di carica *ze* dotata di una velocità *v*.

Per le *particelle cariche*:

se $b \gg 10^{-10} \text{ m}$, prevalgono l'eccitazione e la *ionizzazione*, cioè l'interazione dell'intero atomo con il campo elettromagnetico della particella (puntiforme);

se $b \sim 10^{-10} \text{ m}$ e se l'energia della particella è "alta", questa interagisce con un solo elettrone (libero), dando luogo a fenomeni di ionizzazione e *knock-on*;

se $10^{-15} \text{ m} \ll b \ll 10^{-10} \text{ m}$, la particella risente del campo coulombiano del nucleo e si ha l'irraggiamento (*bremsstrahlung*);

se $b \sim 10^{-15} \text{ m}$, interviene la forza nucleare per quasi tutte le particelle.

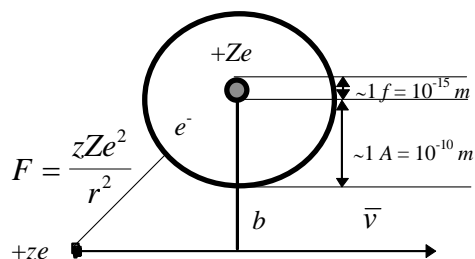


Fig. 5.3 - Meccanismo di ionizzazione di un atomo da parte di una particella carica.

Per il **fotone**:

se $b \sim 10^{-10} m$:

- a bassa energia prevale l'interazione con l'elettrone legato all'atomo, cioè l'effetto **fotoelettrico**;
- ad alta energia è prevalente un processo di tipo elastico come tra due particelle libere, cioè l'effetto **Compton**.

se $10^{-15} m \ll b \ll 10^{-10} m$ il fotone sente il campo elettromagnetico del nucleo e si crea una coppia $e^+ - e^-$.

Vedremo brevemente i principali modi di interazione, suddividendo le particelle nei quattro diversi gruppi:

1. **particelle cariche pesanti** (protoni, mesoni^{+/-}, ecc.);
2. **particelle cariche leggere** (elettroni, positroni);
3. **radiazione elettromagnetica** (raggi γ , X);
4. **particelle neutre pesanti** (neutroni).

5.3 - Le particelle cariche pesanti

Questo tipo di particelle perde energia essenzialmente a causa delle interazioni con gli elettroni atomici, provocando l'eccitazione o la ionizzazione degli atomi stessi **Fig. 5.3**).

L'interazione avviene simultaneamente con molti elettroni e la perdita di energia per ogni singola interazione è piccola ma continua, finché la particella non viene fermata. Le traiettorie non subiscono forti deviazioni e restano quasi rettilinee.

La perdita di **energia cinetica** per collisione dE per unità di percorso dx nel mezzo considerato (detta anche potere d'arresto) è data dalla formula di Bohr:

$$5.12) \quad \left[-\frac{dE}{dx} \right]_c = 4\pi \frac{z^2 e^4}{m_e v^2} n Z L(v) = 4\pi \frac{z^2 e^4}{m_e v^2} \rho N_A \frac{Z}{A} L(v)$$

dove: ze = carica della particella incidente;

m_e = massa a riposo dell'elettrone;

v = velocità della particella incidente;

n = numero di atomi/cm³ = $\rho N_A / A$ (ρ = densità del materiale, A = peso atomico e N_A = numero di Avogadro);

Z = numero atomico del materiale;

$L(v)$ = funzione lentamente variabile (logaritmica) della velocità v della particella, data da

$$5.13) \quad L(v) = \ln \frac{m_e v^3}{\pi I e^2}$$

dove $I \approx 13.5 \cdot Z \text{ eV}$ è il potenziale di ionizzazione dell'atomo di cui è costituito il materiale, valida per velocità non relativistiche ($v \ll c$). Per velocità alte e relativistiche, Bethe ha proposto per la $L(v)$ l'espressione

$$5.13') \quad L(v) = \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2 - \frac{c}{Z} - \delta$$

dove $\beta = v/c$ ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ è la velocità della luce). c e δ sono termini correttivi relativi rispettivamente al contributo degli e^- delle *shell* più interne ed all'effetto densità; il primo si presenta alle basse e medie energie, il secondo prevale ad energie relativistiche.

Se la massa dell'elettrone è posta uguale a

$$m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

la 5.12) è espressa in MeV/cm .

La formula 5.12) è sperimentale e, nella formulazione di Bohr, è valida per velocità comprese nell'intervallo

$$5.14) \quad 0.2 \leq \beta \leq 0.7$$

per protoni e mesoni in quanto a basse velocità l'energia di legame degli elettroni non è più trascurabile e inoltre la particella incidente subisce una progressiva neutralizzazione catturando elettroni orbitali. Il limite superiore dipende invece da effetti relativistici non contenuti nella (5.12) nella versione di Bohr, quali la polarizzazione del mezzo e l'effetto densità nei materiali solidi, presenti invece nella formulazione di Bethe attraverso il termine δ .

Le dipendenze principali della dE/dx sono quindi:

1. la dipendenza dal quadrato della carica ionizzante z^2 ;
2. la dipendenza dall'inverso di v^2 (quindi dall'inverso dell'energia), per cui, lungo la propria traiettoria, una particella ionizza maggiormente verso fine percorso;
3. la dipendenza dal numero nZ di elettroni per cm^3 del materiale e cioè dal numero atomico del mezzo attraversato;
4. la non dipendenza dalla massa della particella;
5. a parità di altre condizioni la perdita di energia per collisione è maggiore in elementi leggeri ($Z/A \approx 1/2$) che in elementi pesanti ($Z/A \approx 1/2.5$).

L'andamento della 5.12) in funzione dell'energia della particella incidente è riportato in Fig. 5.4 assieme ai percorsi (*range*) per varie particelle in diversi materiali.

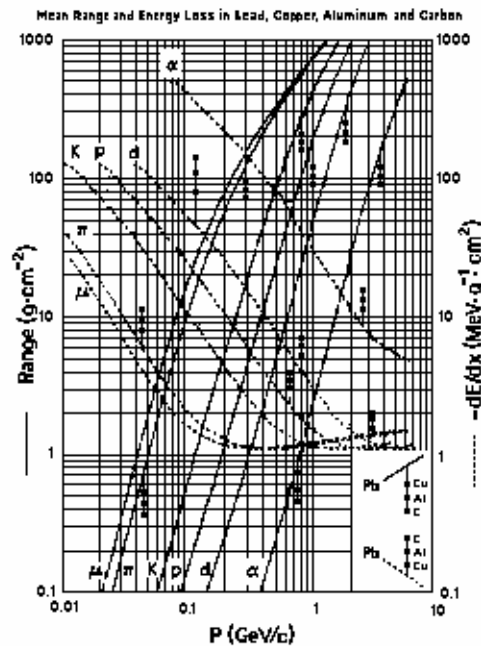


Fig. 5.4 - Potere frenante e percorso (*range*) in funzione dell'energia.

Ai fini della rivelazione, quindi, il passaggio di una particella carica attraverso un mezzo lascia lungo il percorso una serie di atomi eccitati o addirittura ionizzati. Questi, diseccitandosi elettromagneticamente, restituiscono l'energia ricevuta sotto forma di luce, che può essere misurata indirettamente sotto opportune condizioni, consentendo così di rivelare la particella e misurarne la perdita di energia.

Il percorso (*range*)

In seguito alla ionizzazione del mezzo, la particella incidente perde continuamente energia e si ferma dopo un percorso R , dato dalla:

$$5.15) \quad R = \int_E^0 \frac{dx}{dE} dE \approx \frac{M}{z^2} f\left(\frac{E}{M}\right) = \frac{M}{z^2} f(v^2)$$

detto anche *range* della particella. Esso è una funzione del rapporto E/M tra l'energia E e la massa M della particella considerata; quindi dipende solo dalla sua velocità v , oltre che dalla massa M e dalla carica z della stessa. Ne consegue che il percorso di una particella in un dato materiale è caratteristico della particella stessa e, nota

l'energia, ne permette l'identificazione mediante tabelle o grafici, che forniscono le relazioni percorso-energia.

Spettro differenziale

Consideriamo ora un fascio di n_0 particelle, tutte con la stessa energia iniziale E_0 . A causa delle fluttuazioni statistiche della perdita di energia, le particelle non hanno tutte identicamente lo stesso percorso nel medesimo materiale. I loro percorsi seguono una distribuzione gaussiana intorno a un percorso medio R_m in corrispondenza dell'energia E_0 . In Fig. 5.5 è rappresentata una tale distribuzione gaussiana; in ascissa si riporta il percorso delle varie particelle del fascio. Ovviamente il numero di particelle con percorso compreso tra x ed $x+dx$ è rappresentato dall'area $h \cdot dx$ tratteggiata in figura.

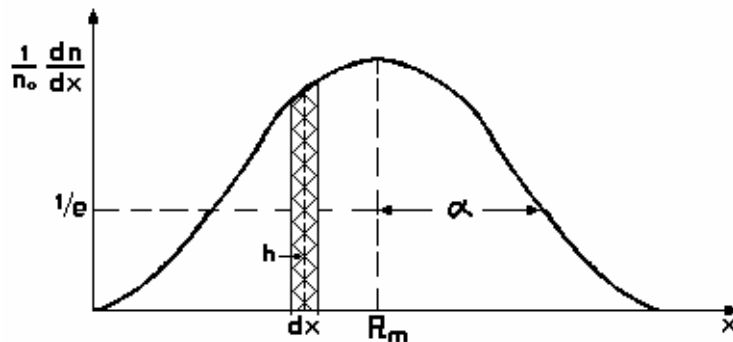


Fig. 5.5 - Distribuzione differenziale dei percorsi (*range*).

Spettro integrale

Se, in luogo della distribuzione differenziale del percorso, si riporta sulle ordinate il numero di particelle contate con percorso x superiore al valore riportato in ascissa, si ottiene quella integrale (Fig. 5.6). La forma di tale distribuzione è l'integrale della curva di Fig. 5.5. In corrispondenza di $n_0/2$ si ha per x il valore del percorso medio R_m . Tracciando la tangente al punto di flesso, si intercetta l'asse delle ascisse nel punto corrispondente al valore del percorso estrapolato R_{ext} . L'introduzione di R_{ext} è interessante, in quanto la differenza $(R_{ext}-R_m)$ fornisce la misura della semilarghezza della gaussiana del percorso. Si dimostra, infatti, che se $\alpha\sqrt{2}$ è la deviazione standard della gaussiana di Fig. 5.5, si ha:

$$5.16) \quad R_{ext} - R_m = \sqrt{\pi} \frac{\alpha}{2}$$

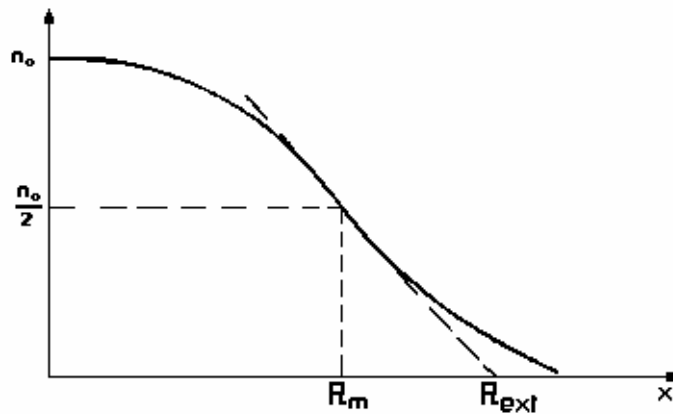


Fig. 5.6-Distribuzione integrale dei percorsi (*range*).

Il parametro α è considerato una misura del cosiddetto sparpagliamento (*straggling*) dei percorsi delle n_0 particelle, inizialmente monoenergetiche.

5.4 - Le particelle cariche leggere

In confronto con le particelle cariche pesanti, quelle leggere perdono energia con molto minore continuità, ma in grandi frazioni in quanto le loro masse sono comparabili con quelle degli elettroni orbitali. Di conseguenza le traiettorie negli assorbitori risultano molto più tortuose.

Per queste particelle è ancora valida una formula, simile alla 5.12), per la perdita di energia per collisione:

$$5.17) \quad \left[-\frac{dE}{dx} \right]_c = 2\pi \frac{e^4 nZ}{m_e v^2} \left[\ln \frac{m_e c^2 \beta^2 E}{2I(1-\beta^2)} - a \right] \quad a = \begin{cases} 1.45 \text{ per } e^- \\ 1.80 \text{ per } e^+ \end{cases}$$

con lo stesso significato dei simboli, già usati nella 5.12).

In più per le particelle cariche leggere intervengono anche le perdite di energia per irraggiamento elettromagnetico (*bremstrahlung*). Questo fenomeno, già presente nell'elettrodinamica classica, consiste nell'emissione di onde elettromagnetiche da parte della particella carica quando viene sottoposta ad una accelerazione, per esempio quando viene deflessa dalla sua traiettoria dal campo coulombiano del nucleo o degli elettroni. La potenza irradiata è data dalla formula di Larmor

$$5.18) \quad P = \frac{2}{3} \frac{z^2 e^2}{c^3} a^2$$

dove ze = carica della particella;

a = sua accelerazione;
 c = velocità della luce.

e da questa si deduce che la potenza irradiata varia con l'inverso del quadrato della massa: essendo $F=ma$, a parità di forza l'accelerazione è proporzionale a $1/m$. Ne consegue che l'irraggiamento è di fatto importante solo per gli elettroni e i positroni: già il μ , che è la particella più che leggera nota dopo l'elettrone, irraggia con una potenza che è ridotta di un fattore $(m_e/m_\mu)^2=1/200^2\approx 2.5\cdot 10^{-5}$ rispetto all'elettrone. Per queste particelle più pesanti l'irraggiamento diventa significativo solo ad energie superiori al TeV .

Le perdite di energia per irraggiamento avvengono, quindi, sotto forma di emissione di raggi γ e presentano uno spettro continuo dall'energia zero fino all'energia massima E_0 della particella incidente (Fig. 5.7). Esse sono espresse dalla formula

$$5.19) \quad \left[-\frac{dE}{dx} \right]_b = 4\alpha \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{n}{A} Z^2 E \ln \frac{183}{\sqrt[3]{Z}}$$

nella quale $\alpha=2\pi e^2/hc$. La 5.19) può scriversi anche nella forma

$$5.20) \quad \left[-\frac{dE}{dx} \right]_b = \frac{E}{X_0} \propto EZ^2$$

nella quale X_0 , detta lunghezza di radiazione del materiale, è definita come

$$5.21) \quad \frac{1}{X_0} = 4\alpha \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{n}{A} Z^2 E \ln \frac{183}{\sqrt[3]{Z}}$$

Questa grandezza rappresenta il percorso entro il quale l'energia della particella incidente si riduce di un fattore e (costante di Nepero) per effetto dei soli processi radiativi. Infatti dalla 5.19) si ricava:

$$5.22) \quad -\frac{dE}{E} \approx \frac{dx}{X_0}$$

che, se E_0 è l'energia iniziale della particella, per integrazione diventa

$$5.23) \quad E = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

da cui, sostituendo all'esponente X_0 al posto di x , si ottiene per l'energia $E = E_0/e$.

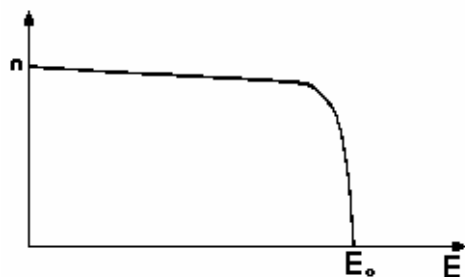


Fig. 5.7 - Spettro di *bremsstrahlung*.

Per elettroni e positroni la perdita di energia per irraggiamento diventa rapidamente dominante rispetto a quella per ionizzazione, che cresce solo logicamente con l'energia. I fattori E e Z^2 al numeratore dell'espressione 5.19) indicano che le perdite radiative sono predominanti per alte energie delle particelle e per materiali con alto numero atomico. Questo fatto va confrontato con le perdite di energia per collisione (5.12), che sono proporzionali a Z ed aumentano solo logicamente con E . Si può dimostrare che il loro rapporto è

$$5.24) \quad \frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_b}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_c} \approx \frac{E \cdot Z}{800} \quad E \text{ in MeV}$$

dove E = energia della particella;
 Z = numero atomico del mezzo;

dalla quale si ricava l'energia critica E_c , ossia l'energia a cui le perdite per collisione sono uguali o confrontabili con quelle per irraggiamento:

$$5.25) \quad E_c \approx \frac{800}{Z} \quad E_c \text{ in MeV}$$

Per gli elettroni, che interessano la rivelazione (β e fotoelettroni), le energie tipiche sono di alcuni *MeV* e le perdite radiative sono piccole rispetto a quelle per collisione; diventano importanti solo in materiali di elevato numero atomico.

Il fatto che gli elettroni possano subire deflessioni a grande angolo lungo il loro percorso rende possibile la retrodiffusione (*backscattering*), ossia che la particella riemerge dalla superficie attraverso cui è entrata. Questo fenomeno implica che non tutta l'energia viene depositata nel mezzo e quindi una parte viene persa ai fini della rivelazione. La retrodiffusione avviene anche nelle sorgenti β sul materiale di supporto del radioisotopo.

5.5 - La radiazione elettromagnetica

L'interazione dei fotoni γ o X con la materia avviene principalmente a causa di tre diversi processi elettromagnetici, nei quali o sono assorbiti o vengono diffusi perdendo energia:

- A. l'effetto **fotoelettrico**, che domina a bassa energia;
- B. l'effetto **Compton**;
- C. la produzione di **coppie**, che domina ad alta energia.

Le **modalità di interazione** sono predominanti a diverse energie della radiazione incidente e la zona in cui si sovrappongono è relativamente ristretta. La **Fig. 5.8** illustra le zone di energia tipiche per ciascun fenomeno: le curve rappresentano i valori di Z dell'assorbitore e di energia dei γ per i quali gli effetti adiacenti sono competitivi.

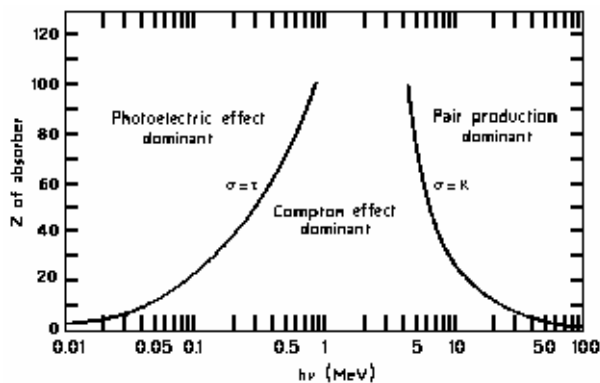


Fig. 5.8 - Zone energetiche dove predominano l'effetto fotoelettrico, la diffusione Compton e la produzione di coppie. Le curve mostrano i valori di Z e hf ai quali i due effetti adiacenti si equivalgono.

A - L'effetto fotoelettrico.

In questo processo l'energia del γ incidente è interamente assorbita da un elettrone atomico, che così è in grado di abbandonare l'atomo. Per γ di sufficiente energia, la più probabile origine del fotoelettrone è l'orbita K più fortemente legata. L'interazione avviene con l'atomo nel suo complesso e non può avere luogo su elettroni liberi.

Se hf è l'energia del fotone ed E_B l'energia di legame dell'elettrone, questo viene emesso con una energia cinetica pari a

$$5.26) \quad T = hf - E_B$$

La 5.26) evidenzia che l'effetto fotoelettrico è un processo a soglia, ossia che è necessario fornire all'elettrone una quantità minima di energia affinché il processo

abbia luogo. Questa energia minima (*soglia*) è pari all'energia di legame E_B dell'elettrone e quindi dipende dal materiale. Il risultato del fenomeno è la sparizione di un fotone e la formazione di una coppia di ioni: uno ione positivo (l'atomo ionizzato) e uno negativo (l'elettrone).

Il processo fotoelettrico, è predominante per γ di bassa energia e per materiali di elevato numero atomico Z . La probabilità relativa (sezione d'urto) è data da

$$5.27) \quad \sigma_f \propto \frac{NZ^5}{hf^{3.5}}$$

dove: $N = \text{atomi}/m^3$ dell'assorbitore;
 $Z = \text{numero atomico dell'assorbitore.}$

A causa di questa forte dipendenza da Z nelle schermature si usa prevalentemente il piombo.

B - L'effetto Compton.

Il fenomeno, schematizzato in Fig. 5.9, consiste nella *diffusione* (*scattering*) di un fotone da parte di un elettrone libero o poco legato ($hf \gg E_B$).

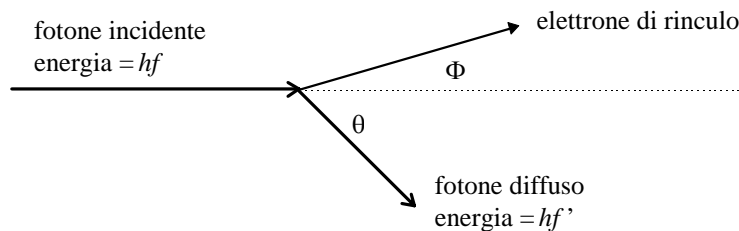


Fig. 5.9 - L'effetto Compton.

Se si considera un elettrone libero, le equazioni di conservazione dell'energia e della quantità di moto consentono di ricavare la relazione fra la lunghezza d'onda λ del fotone incidente e quella λ' del fotone diffuso

$$5.28) \quad \lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

Il processo, pur descritto tenendo conto dell'aspetto corpuscolare della radiazione e quindi classicamente, fornisce un risultato impossibile classicamente, ma vero nella realtà: dalla 5.28) si deduce che nella diffusione l'onda cambia frequenza a seconda dell'angolo θ a cui esce.

La probabilità per atomo di diffusione Compton dipende dal numero di elettroni presenti (NZ) e quindi cresce linearmente con Z ; essa è data da

$$5.29) \quad \sigma_C \propto \frac{N \cdot Z}{hf}$$

In Fig. 5.10 è riportata la distribuzione angolare dei fotoni diffusi per diversi valori dell'energia hf del fotone incidente ($\alpha=hf/m_e c^2$) in funzione dell'angolo di diffusione θ ; è evidente che il processo è anisotropo.

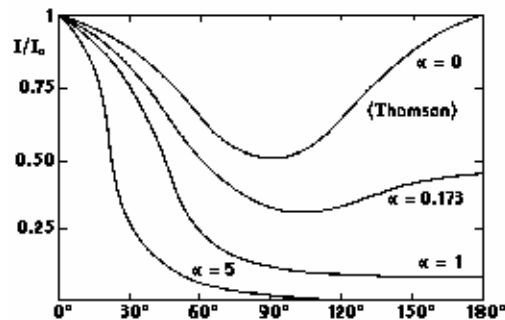


Fig. 5.10 - Distribuzione angolare dei fotoni Compton diffusi in funzione dell'angolo θ e dell'energia α ($\alpha=hf/m_e c^2$).

C - La produzione di coppie.

Il fenomeno consiste nella trasformazione o materializzazione del γ in una coppia elettrone-positrone; può realizzarsi solo in presenza di un nucleo o di un altro elettrone per poter conservare la quantità di moto oltre all'energia. Anche questo è un processo a soglia in quanto il γ deve possedere una energia almeno pari a due masse elettroniche e quindi l'energia di soglia è

$$5.30) \quad E_S \sim 1.02 \text{ MeV}$$

Il cammino libero medio X_p per produzione di coppie da parte di un γ è ricavabile dalla lunghezza di radiazione:

$$5.31) \quad X_p = \frac{9}{7} X_0$$

Rispetto agli altri processi questo effetto è predominante alle alte energie; la sua probabilità varia molto grossolanamente come

$$5.32) \quad \sigma_p \propto N \cdot Z^2 (hf - 2m_e c^2)$$

E' da notare che il positrone appena formato tende a ricombinarsi con un elettrone, subendo così un processo detto di annichilazione, che produce due γ in direzioni opposte.

L'irraggiamento (*bremstrahlung*) e la produzione di **coppie** si combinano insieme, dando luogo a un nuovo fenomeno: **gli sciame elettromagnetici** (Fig. 5.11).

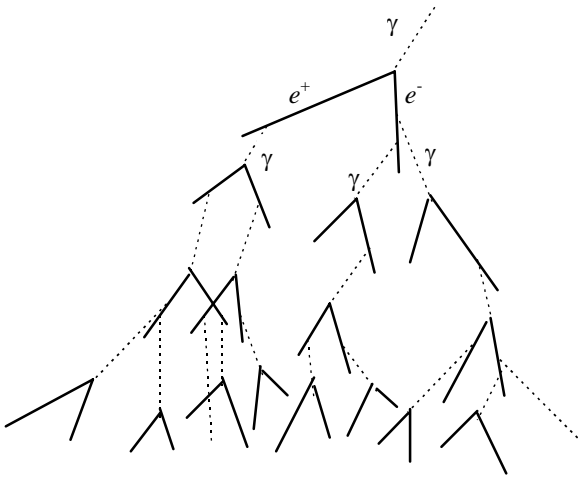


Fig. 5.11 - Sviluppo di una cascata elettromagnetica.

Infatti quando un singolo γ o un elettrone di alta energia attraversa la materia, dà luogo a un processo di moltiplicazione attraverso successivi irraggiamenti e produzioni di **coppie**: viene così generato un grande numero di elettroni e di γ di energia sempre minore. Come risulta dalla 5.19), la perdita di energia per irraggiamento è proporzionale a $1/X_0$ e quindi a Z^2 , per cui questo effetto è tanto più vistoso quanto più è pesante il materiale attraversato (per es. il piombo). Per avere un'idea dell'ordine di grandezza del fenomeno, basta pensare che un elettrone di sufficiente energia ($E_e \gg m_e c^2$) dà luogo in una lunghezza di radiazione a circa tre γ , che a loro volta originano circa tre coppie e^+e^- in un'altra lunghezza di radiazione (vedasi la 5.31). Il numero di particelle, che compongono lo sciame, aumenta quindi rapidamente fino a quando la loro energia media diventa minore dell'energia critica E_c (vedasi la 5.25). In tale condizione gli elettroni vengono frenati principalmente per collisione, i fotoni per urti **Compton** ed il processo di moltiplicazione si arresta, provocando lo spegnimento dello sciame.

APPENDICE - L'effetto Compton

Le grandezze in gioco prima e dopo l'interazione γ - e^- , nel caso di un elettrone in quiete, sono rappresentate in Fig. 5.C e schematizzate nella tabella successiva.

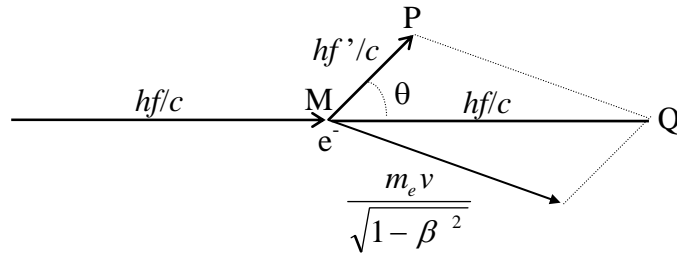


Fig. 5.C - Cinematica dell'effetto Compton.

Tab. 5.C.1 - Grandezze cinematiche prima e dopo l'urto nella diffusione Compton schematizzata in Fig. 5.C.

Particella (!)	grandezza	prima	dopo
fotone	energia	hf	hf'
	impulso	$\frac{hf}{c}$	$\frac{hf'}{c}$
elettrone	energia	$m_e c^2$	$\frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
	impulso	0	$\frac{m_e \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Applichiamo la conservazione dell'energia:

$$5.C1) \quad hf + m_e c^2 = hf' + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Applichiamo la conservazione della quantità di moto, utilizzando il teorema di Carnot per il triangolo MPQ (vedasi Fig. 5.9):

$$5.C2) \quad \left(\frac{m_e \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 = \left(\frac{hf}{c} \right)^2 + \left(\frac{hf'}{c} \right)^2 - 2 \frac{hf}{c} \frac{hf'}{c} \cos \theta$$

Ricaviamo β^2 dalla 5.C1):

$$\sqrt{1 - \beta^2} (hf - hf' + m_e c^2) = m_e c^2$$

e quadrando

$$1 - \beta^2 = \frac{(m_e c^2)^2}{(hf - hf' + m_e c^2)^2}$$

si ottiene

$$5.C3) \quad \beta^2 = 1 - \frac{(m_e c^2)^2}{(hf - hf' + m_e c^2)^2}$$

Mettiamo in evidenza β^2 nella 5.C2):

$$5.C4) \quad \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} (m_e c)^2 = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 - 2 \frac{hf}{c} \frac{hf'}{c} \cos \theta$$

e sostituiamoci β^2 ricavato dalla 5.C3):

$$\frac{1 - \frac{(m_e c^2)^2}{(hf - hf' + m_e c^2)^2}}{1 - 1 - \frac{(m_e c^2)^2}{(hf - hf' + m_e c^2)^2}} (m_e c)^2 = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 - 2 \frac{hf}{c} \frac{hf'}{c} \cos \theta$$

Semplifichiamo la frazione:

$$\left[\frac{(hf - hf' + m_e c^2)^2}{m_e^2 c^4} - 1 \right] m_e^2 c^2 = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 - 2 \frac{hf}{c} \frac{hf'}{c} \cos \theta$$

Sviluppiamo il primo membro, svolgendo il prodotto:

$$\left(\frac{hf - hf' + m_e c^2}{c}\right)^2 - m_e^2 c^2 = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 - 2 \frac{hf}{c} \frac{hf'}{c} \cos \theta$$

e riscriviamolo, separando i termini della frazione al primo membro:

$$\left(\frac{hf}{c} - \frac{hf'}{c} + \frac{m_e c^2}{c}\right)^2 - m_e^2 c^2 = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 - 2 \frac{hf}{c} \frac{hf'}{c} \cos \theta$$

Effettuando il quadrato, si ottiene:

$$\left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 + m_e^2 c^2 - 2\frac{hf}{c}\frac{hf'}{c} + 2\frac{hf}{c}m_e c - 2\frac{hf'}{c}m_e c - m_e^2 c^2 = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 - 2\frac{hf}{c}\frac{hf'}{c}\cos\theta$$

Dopo avere semplificato, raggruppiamo al primo membro tutti i termini, che contengono hf/c

$$-\frac{hf}{c}\frac{hf'}{c} + \frac{hf}{c}m_e c + \frac{hf}{c}\frac{hf'}{c}\cos\theta = \frac{hf'}{c}m_e c$$

Dividendo entrambi i membri per $(hf/c)\cdot(hf'/c)$ si ottiene:

$$-1 + \frac{c}{hf'}m_e c + \cos\theta = \frac{c}{hf}m_e c$$

e, dividendo ulteriormente per $m_e c$, ricaviamo:

$$-\frac{1}{m_e c} + \frac{c}{hf'} + \frac{\cos\theta}{m_e c} = \frac{c}{hf}$$

Raggruppando i termini in hf e in $m_e c$ al secondo membro

$$\frac{c}{hf'} = \frac{c}{hf} + \frac{1}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

e moltiplicando per h/c , otteniamo:

$$5.C5) \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{f} + \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

Ricordando che la lunghezza d'onda è $\lambda=c/f$, moltiplicando la 5.C5) per c si ricava:

$$5.C6) \quad \lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

o anche:

$$5.C7) \quad \Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

Le 5.C5), 5.C6) e 5.C7) rappresentano tre modi diversi di descrivere l'effetto Compton o in termini di frequenza (5.C5), o in termini di lunghezza d'onda (la 5.C6 e la 5.C7).

La relazione Compton può essere scritta in termini di energia partendo dalla 5.C5). Infatti, effettuando il *m.c.m.* si ha:

$$fm_e c^2 = f'm_e c^2 + hff'(1 - \cos\theta)$$

e, raccogliendo f a secondo membro,

$$fm_e c^2 = f'(m_e c^2 + hf(1 - \cos\theta))$$

Se dividiamo per $m_e c^2$, otteniamo:

$$f = f' \left(1 + \frac{hf}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \right)$$

che, moltiplicata per h , fornisce:

$$5.C8) \quad hf' = \frac{hf}{1 + \frac{hf}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

Ricordando che $E=hf$ ed $E'=hf'$, si ottiene:

$$5.C9) \quad E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

con ovvio significato dei simboli.

Dalla 5.C9) risulta che l'energia massima per il fotone diffuso si ottiene in avanti, cioè per $\theta=0^\circ$:

$$5.C10) \quad E'_{\max} = E$$

ed è uguale all'energia E del fotone incidente. Il minimo valore si ottiene, invece, all'indietro, cioè quando il fotone è retrodiffuso a $\theta=180^\circ$. In questo caso

$$5.C11) \quad E'_{\min} = \frac{E}{1 + \frac{2E}{m_e c^2}}$$

Nel caso in cui l'energia del fotone incidente sia molto elevata ($E \gg m_e c^2$), l'1 a denominatore della 5.C10) diventa trascurabile e di conseguenza si ottiene:

$$5.C12) \quad E'_{\min} = \frac{m_e c^2}{2}$$